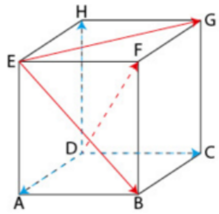
ACTIVITÉ

Pour calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de deux vecteurs de l'espace, on choisit trois points O, M, N tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$, puis on calcule $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ dans un plan $\mathscr{P}$ contenant les points O, M, N.

On modélise un Rubik's cube par un cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-dessous.

1 **a)** Dans chaque cas, calculer le produit scalaire.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH}$ (utiliser le plan (ADE))
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG}$ (utiliser le plan du rectangle AFGD)

b) En déduire que dans l'espace, on a également $\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \text{AH} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$.



2 **a)** Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AF}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BG}$. Calculer alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
b) Calculer $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire ?

3 **On se place dans le repère $(D\,;\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ orthonormé.**

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;y\,;z)$ et $(x'\,;y'\,;z')$ dans le repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.
- Exprimer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$.
- Développer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en utilisant le fait que dans l'espace, le produit scalaire est encore bilinéaire et symétrique. En déduire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

b) Utiliser la formule précédente pour démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{DF}$, et que les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont orthogonaux. Que peut-on en déduire ?

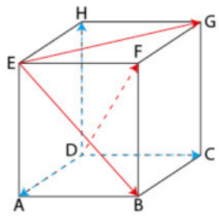
ACTIVITÉ

Pour calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de deux vecteurs de l'espace, on choisit trois points O, M, N tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$, puis on calcule $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ dans un plan $\mathscr{P}$ contenant les points O, M, N.

On modélise un Rubik's cube par un cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-dessous.

1 **a)** Dans chaque cas, calculer le produit scalaire.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH}$ (utiliser le plan (ADE))
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG}$ (utiliser le plan du rectangle AFGD)

b) En déduire que dans l'espace, on a également $\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \text{AH} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$.



2 **a)** Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AF}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BG}$. Calculer alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
b) Calculer $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire ?

3 **On se place dans le repère $(D\,;\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ orthonormé.**

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;y\,;z)$ et $(x'\,;y'\,;z')$ dans le repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.
- Exprimer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$.
- Développer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en utilisant le fait que dans l'espace, le produit scalaire est encore bilinéaire et symétrique. En déduire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

b) Utiliser la formule précédente pour démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{DF}$, et que les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont orthogonaux. Que peut-on en déduire ?

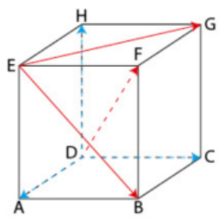
ACTIVITÉ

Pour calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de deux vecteurs de l'espace, on choisit trois points O, M, N tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$, puis on calcule $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ dans un plan $\mathscr{P}$ contenant les points O, M, N.

On modélise un Rubik's cube par un cube ABCDEFGH d'arête 1 représenté ci-dessous.

1 **a)** Dans chaque cas, calculer le produit scalaire.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH}$ (utiliser le plan (ADE))
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG}$ (utiliser le plan du rectangle AFGD)

b) En déduire que dans l'espace, on a également $\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \text{AH} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$.



2 **a)** Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AF}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BG}$. Calculer alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
b) Calculer $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire ?

3 **On se place dans le repère $(D\,;\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ orthonormé.**

a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;y\,;z)$ et $(x'\,;y'\,;z')$ dans le repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.
- Exprimer les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DH}$.
- Développer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en utilisant le fait que dans l'espace, le produit scalaire est encore bilinéaire et symétrique. En déduire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

b) Utiliser la formule précédente pour démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{DF}$, et que les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont orthogonaux. Que peut-on en déduire ?