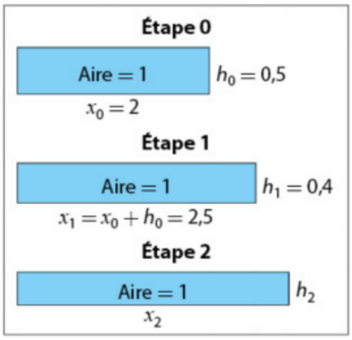
ACTIVITÉ 1

On construit des rectangles successifs d'aire 1 ; on note x_n la longueur et h_n la hauteur (ou largeur). Ainsi, pour tout entier naturel n, $x_n \times h_n = 1$.

Pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = x_n + h_n$.



1 **a)** Calculer x_2 et h_2. *Arrondir au centième si besoin.*

b) Justifier que pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

2 **a)** À l'aide de la calculatrice, tabuler la suite (x_n).

b) Déterminer alors le plus petit entier naturel N tel que $x_N > 10$.

Semble-t-il que pour tout entier naturel $n \geqslant N$, $x_n > 10$?

3 **a)** Vérifier que pour tout entier naturel n, $x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 + \dfrac{1}{x_n^2}$.

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n^2 \geqslant 4 + 2n$.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $x_n \geqslant \sqrt{4 + 2n}$.

d) Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 48$, $x_n \geqslant 10$.

e) Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $x_n \geqslant 1\,000$. Conclure.

ACTIVITÉ 2

Une immense boîte de bonbons pour grossiste est opaque : elle contient n bonbons à la violette et $n + 10$ bonbons au citron (avec $n \geqslant 1$). On suppose que tous les bonbons sont indiscernables au toucher.

On extrait au hasard de cette boîte un bonbon et on note son parfum. On note V_n l'événement « Le bonbon choisi est à la violette » et p_n la probabilité de cet événement.

1 **a)** Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n = \dfrac{n}{2n + 10}$.

b) À l'aide de la calculatrice, tabuler cette suite, puis la représenter graphiquement (*fenêtre* : $0 \leqslant X \leqslant 100$, pas 10 et $0 \leqslant Y \leqslant 1$, pas 0,5).

Décrire le comportement de p_n pour les grandes valeurs de n.

1 Résoudre$\left(0.49 < \dfrac{n}{2\,n + 10} < 0.51, n, n > 0\right)$

→ $\{n > 245\}$

2 Résoudre$\left(0.499 < \dfrac{n}{2\,n + 10} < 0.501, n, n > 0\right)$

→ $\{n > 2495\}$

2 S'aider de l'écran de calcul formel ci-contre, pour préciser un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$,

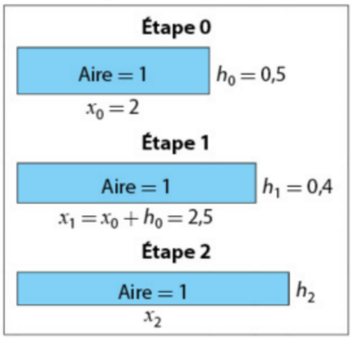
a) $p_n \in \,]0{,}49\,;0{,}51[$; **b)** $p_n \in \,]0{,}499\,;0{,}501[$.

Conclure.

ACTIVITÉ 1

On construit des rectangles successifs d'aire 1 ; on note x_n la longueur et h_n la hauteur (ou largeur). Ainsi, pour tout entier naturel n, $x_n \times h_n = 1$.

Pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = x_n + h_n$.



1 **a)** Calculer x_2 et h_2. *Arrondir au centième si besoin.*

b) Justifier que pour tout entier naturel n, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

2 **a)** À l'aide de la calculatrice, tabuler la suite (x_n).

b) Déterminer alors le plus petit entier naturel N tel que $x_N > 10$.

Semble-t-il que pour tout entier naturel $n \geqslant N$, $x_n > 10$?

3 **a)** Vérifier que pour tout entier naturel n, $x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 + \dfrac{1}{x_n^2}$.

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $x_n^2 \geqslant 4 + 2n$.

c) En déduire que pour tout entier naturel n, $x_n \geqslant \sqrt{4 + 2n}$.

d) Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 48$, $x_n \geqslant 10$.

e) Déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $x_n \geqslant 1\,000$. Conclure.

ACTIVITÉ 2

Une immense boîte de bonbons pour grossiste est opaque : elle contient n bonbons à la violette et $n + 10$ bonbons au citron (avec $n \geqslant 1$). On suppose que tous les bonbons sont indiscernables au toucher.

On extrait au hasard de cette boîte un bonbon et on note son parfum. On note V_n l'événement « Le bonbon choisi est à la violette » et p_n la probabilité de cet événement.

1 **a)** Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n = \dfrac{n}{2n + 10}$.

b) À l'aide de la calculatrice, tabuler cette suite, puis la représenter graphiquement (*fenêtre* : $0 \leqslant X \leqslant 100$, pas 10 et $0 \leqslant Y \leqslant 1$, pas 0,5).

Décrire le comportement de p_n pour les grandes valeurs de n.

1 Résoudre$\left(0.49 < \dfrac{n}{2\,n + 10} < 0.51, n, n > 0\right)$

→ $\{n > 245\}$

2 Résoudre$\left(0.499 < \dfrac{n}{2\,n + 10} < 0.501, n, n > 0\right)$

→ $\{n > 2495\}$

2 S'aider de l'écran de calcul formel ci-contre, pour préciser un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$,

a) $p_n \in \,]0{,}49\,;0{,}51[$; **b)** $p_n \in \,]0{,}499\,;0{,}501[$.

Conclure.