ACTIVITÉ Correction

Rappels de seconde

1. Les trois identités remarquables sont :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

2. $A = (x + 1)^2 + x^2 + 2x + 1.$

$$B = (2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9.$$

$$C = (x - 5)(x + 5) = x^2 - 25.$$

3. Factoriser les expressions suivantes : $D = x^2 - 2 = (x + 2)(x - 2).$

$$E = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2.$$

$$F = 9x^2 - 24x + 16 = (3x + 4)^2.$$

Méthode d'Al-Khwarizmi

1. (a) $A_{AEIH} = (x + 5)(x + 5) = x^2 + 5x + 5x + 25.$

(b) Par l'égalité précédente on en déduit que :

$$(x + 5)(x + 5) = x^2 + 5x + 5x + 25 \implies (x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25 \implies (x + 5)^2 - 25 = x^2 + 10x.$$

(c) On sait que $f(x) = x^2 + 10x - 39$. Par la question précédente, en soustrayant 39 de chaque côté de l'égalité, on obtient : $x^2 + 10x - 39 = (x + 5)^2 - 25 - 39 = (x + 5)^2 - 64.$

$$\text{Ainsi, } f(x) = (x + 5)^2 - 64.$$

(d) $f(x) = 0 \implies x^2 + 10x - 39 = 0 \implies (x + 5)^2 - 64 = 0 \implies (x + 5)^2 - 8^2 = 0 \implies (x + 5 + 8)(x + 5 - 8) = 0$
 $\implies (x + 13)(x - 3) = 0 \implies x = 3 \text{ ou } x = -13.$

(Dans le contexte de l'énoncé, x étant une longueur, seule la solution $x = 3$ serait acceptable, car $-13 < 0$).

2. (a) $(x - 3)(x + 13) = x^2 + 13x - 3x - 39 = x^2 + 10x - 39 = f(x).$

(b) Sur l'ensemble de l'activité, la fonction f possède plusieurs formes :

— **forme développée** d'un polynôme du second degré : $f(x) = x^2 + 10x - 39.$

— **forme factorisée** d'un polynôme du second degré : $f(x) = (x - 3)(x + 13).$

— **forme canonique** d'un polynôme du second degré : $f(x) = (x + 5)^2 - 64.$

Chacune de ces trois formes a permis de résoudre une équation.