ACTIVITÉ Correction

1 **a)** • $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = AD \times AD = 1.$

• $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$

• $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG} = AD \times AD = 1.$

b) D'autre part,

$\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG} = 1.$

D'autre part,

$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 + 0 = 1$

d'où $\overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}.$

2 **a)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AH}$

donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(AF^2 + AH^2 - FH^2)$

d'où $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(2 + 2 - 2) = 1$

b) $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EF} = 0.$

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont orthogonaux.

On peut en déduire que les droites (EA) et (DC) sont orthogonales.

3 **a)** • $\vec{u} = x\overrightarrow{DA} + y\overrightarrow{DC} + z\overrightarrow{DH}$

$\vec{v} = x'\overrightarrow{DA} + y'\overrightarrow{DC} + z'\overrightarrow{DH}.$

• $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\overrightarrow{DA} + y\overrightarrow{DC} + z\overrightarrow{DH}) \cdot (x'\overrightarrow{DA} + y'\overrightarrow{DC} + z'\overrightarrow{DH})$

d'où

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} = {} & xx'\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DA} + xy'\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} + xz'\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DH} \\ & + yx'\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} + yy'\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DC} + yz'\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DH} \\ & + zx'\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DA} + zy'\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DC} + zz'\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DH}\end{aligned}$$

Or $DA = DC = DH = 1$

donc $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DH} = 1.$

De plus , les droites (DA), (DC) et (DH) sont perpendiculaires, donc

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DH} = 0.$$

On en déduit que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

b) $\overrightarrow{EB}(0\,;1;-1)$ et $\overrightarrow{DF}(1;1;1)$

Ainsi $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{DF} = 0 \times 1 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0.$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont orthogonaux.

$\overrightarrow{EG}(-1;1;0)$ et $\overrightarrow{DF}(1;1;1)$

Ainsi $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{DF} = -1 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 0.$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont orthogonaux.

On peut en déduire que la droite (DF) est orthogonale au plan (EBG).