ACTIVITÉS Correction

1 Notion de suite qui tend vers $+\infty$

1 **a)** $x_2 = x_1 + h_1 = 2{,}9$ et $h_2 = \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{2{,}9}$

b) Pour tout entier naturel n, $x_n \times h_n = 1$ donc $x_{n+1} = x_n + h_n = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

2 **a)** Tableau de valeurs

n	0	1	2	3	4	5	6
x_n	2	2,5	2,9	3,24	3,55	3,83	4,1

b) Le premier entier naturel N tel que $x_N \geqslant 10$ est 48.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 48$, $x_n \geqslant 10$ car (x_n) est une suite croissante.

3. a) Pour tout entier naturel n,

$$x_{n+1}^2 = \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)^2 = x_n^2 + 2 + \frac{1}{x_n^2}.$$

b) Initialisation : $x_0^2 = 4$ et $4 + 2 \times 0 = 4$ donc $x_0^2 \geqslant 4 + 2 \times 0$.

Hérédité : on suppose que pour un entier k, $k \geqslant 0$, $x_k^2 \geqslant 4 + 2k$.

Alors $x_k^2 + 2 + \dfrac{1}{x_k^2} \geqslant x_k^2 + 2 \geqslant 4 + 2k + 2$

Donc $x_{k+1}^2 \geqslant 4 + 2(k+1)$.

Conclusion :

pour tout entier naturel n, $x_n^2 \geqslant 4 + 2n$.

c) On applique la racine carrée qui est une fonction croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Pour tout entier naturel n, $\sqrt{x_n^2} \geqslant \sqrt{4+2n}$ et, comme x_n est une longueur positive, on a $x_n \geqslant \sqrt{4+2n}$.

d) Pour tout entier naturel $n \geqslant 48$, $x_n \geqslant \sqrt{4+2n}$ et $\sqrt{4+2n} \geqslant \sqrt{4+2\times 48}$. Comme $\sqrt{4+2\times 48} = 10$, on en déduit que $x_n \geqslant 10$.

e) Pour que $x_n \geqslant 1000$, il suffit que $\sqrt{4+2n} \geqslant 1000$.

C'est le cas pour $n = 499\,998$.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 499\,998$, $x_n \geqslant \sqrt{4+2n} \geqslant \sqrt{4+2\times 499\,998} \geqslant 1000$.

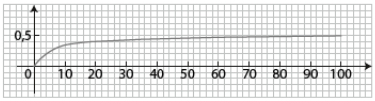
La limite de la suite (xn) en plus l'infini est plus l'infini.

2 Notion de suite convergente

1 **a)** L'expérience aléatoire est modélisée par une situation équiprobable sur un univers de $2n + 10$ issues (autant que de bonbons dans la boîte). L'événement V_n comporte alors n issues favorables (autant que de bonbons à la violette).

Donc pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $p_n = \dfrac{n}{2n+10}$.

b) Représentation graphique de la suite :



Les termes p_n se rapprochent de plus en plus (et autant que l'on veut) de 0,5.

2 **a)** On lit que $p_n \in]0{,}49\,;0{,}51[$ pour tout entier naturel $n \geqslant 246$.

b) On lit que $p_n \in]0{,}499\,;0{,}501[$ pour tout entier naturel $n \geqslant 2496$.

La limite de la suite (pn) est 0,5 (ou la suite converge vers 0,5).