ACTIVITÉ CORRECTION

1 Pour tout réel x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$,

$$S(x) = OP \times OQ = \cos(x)\sin(x).$$

2 **a)** Pour tout réel x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on pose $u(x) = \cos(x)$ et $v(x) = \sin(x)$.

Alors, $u'(x) = -\sin(x)$ et $v'(x) = \cos(x)$.

Donc, pour tout réel x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$,

$S'(x) = -\sin(x) \times \sin(x) + \cos(x) \times \cos(x)$

$S'(x) = -\sin^2(x) + \cos^2(x)$.

b) Pour tout réel x, $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, donc $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$.

Ainsi, $S'(x) = -(1 - \cos^2(x)) + \cos^2(x)$

$S'(x) = -1 + \cos^2(x) + \cos^2(x)$

soit $S'(x) = 2\cos^2(x) - 1$.

c) D'après l'écran de calcul formel,

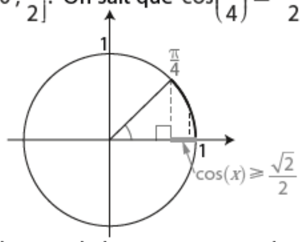
$$S'(x) = (\sqrt{2}\cos(x) - 1)(\sqrt{2}\cos(x) + 1).$$

Or, pour tout réel x de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.

Donc, $\sqrt{2}\cos(x) + 1$ est un nombre réel positif.

Ainsi, $S'(x)$ est du signe de $\sqrt{2}\cos(x) - 1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

d) On s'aide du cercle trigonométrique pour résoudre l'inéquation $\cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ dans l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Les solutions de l'inéquation sont les réels x tels que $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$. L'ensemble des solutions est $S = \left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$.

3. D'après la question **2. c)**, $S'(x)$ est du signe de $\sqrt{2}\cos(x) - 1$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Or, $\sqrt{2}\cos(x) - 1 \geqslant 0$ équivaut à $\cos(x) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ soit $\cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On a résolu cette inéquation dans la question **2. d)**.

On peut donc dresser le tableau de variations de la fonction S sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

L'aire $S(x)$ est maximum pour $x = \frac{\pi}{4}$. Le point M est le point du cercle trigonométrique tel que $\widehat{POM} = \frac{\pi}{4}$ rad.

Dans ce cas, $\sin(x) = \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ainsi, le rectangle OPMQ est un carré.