

ACTIVITÉ 1 Correction

1 L'espérance de X est $\mu = 100 \times \frac{1}{2} = 50$, la variance de X est $V = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25$.

2 a)

δ	5	8	10	12
$P(X - \mu \geq \delta)$	0,37	0,13	0,06	0,02
$\frac{V}{\delta^2}$	1	0,39	0,25	0,17

b) On conjecture que pour tout nombre réel $\delta > 0$, $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$.

ACTIVITÉ 2 Correction

1 a) La loi de probabilité de X est donnée par :

X	0	1	2
$P(X = x)$	0,25	0,5	0,25

b) $E(X) = 0,25 \times 0 + 0,5 \times 1 + 0,25 \times 2 = 1$

2 a) On choisit un nombre aléatoire $a \in [0; 1]$.

si $a \leq 0,25$, X renvoie 0 ;

si $a \geq 0,75$, X renvoie 2 ;

pour les autres valeurs de a , X renvoie 1.

Ainsi la fonction X réalise une simulation de la variable aléatoire X .

b) La fonction Moyenne renvoie la moyenne des n valeurs prises par X .

La fonction Ecart renvoie l'écart entre cette moyenne et l'espérance de X .

3 Lorsque la taille n de l'échantillon augmente, l'écart entre la moyenne de l'échantillon et l'espérance de X diminue.

Il semble que l'on puisse rendre cet écart aussi proche de 0 que l'on veut à condition de prendre n assez grand.

REMARQUES

L'objectif de cette section est d'une part d'approfondir le sens de l'écart-type comme mesure de dispersion, d'autre part de couronner la partie « Probabilités » par la loi des grands nombres, qui est le premier résultat fondamental de la théorie des probabilités et dont les implications sont considérables.

Pour cela, l'outil employé est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dont l'idée fondamentale est mise en valeur : l'écart type σ d'une variable aléatoire X est l'unité naturelle pour étudier la dispersion de X autour de son espérance μ ; par construction, il est naturel d'observer des écarts de X à μ en deçà ou au-delà de σ . L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev montre qu'en revanche des écarts de X à μ de quelques σ deviennent improbables. Ce résultat, d'une importance majeure en lui-même, permet de plus d'établir la loi des grands nombres, selon laquelle l'écart entre la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire et l'espérance de cette variable ne dépasse une valeur donnée à l'avance qu'avec une probabilité qui tend vers zéro quand la taille de l'échantillon tend vers l'infini.

Il est utile de faire remarquer aux élèves que le caractère universel de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev a pour contrepartie le fait qu'elle est loin d'être optimale : ainsi, elle montre qu'un écart à μ supérieur à 2σ est de probabilité inférieure ou égale à $1/4$ alors que les élèves ont découvert par simulation que cette probabilité est souvent majorée par 0,05. En avoir conscience ne diminue pas l'intérêt théorique de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, et permet de mettre en évidence des cas de raisonnement par conditions suffisantes, par exemple la recherche d'une taille d'échantillon pour majorer une probabilité.