ACTIVITÉS Correction

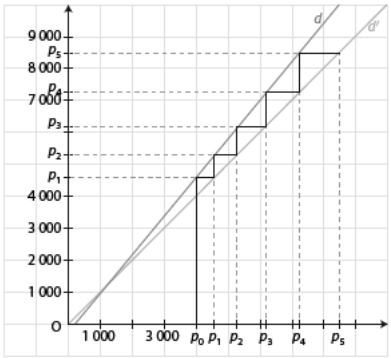
1 Représenter graphiquement une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$

1 **a)** $p_{n+1} = \underbrace{\left(1+\frac{20}{100}\right)}_{\text{augmentation de 20 \%}} p_n \underbrace{-200}_{\text{disparition de 200 fourmis}}$.

b) Au premier mars 2020 la population est de 4 205 fourmis.

2 **a)** Pour tout nombre entier naturel n, $p_{n+1} = f(p_n)$ où f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 1{,}2x - 200$.

b)



c) La suite (p_n) semble strictement croissante. La population de fourmis semble s'accroître et tendre vers l'infini.

2 Une suite croissante majorée

1 On démontre par récurrence que pour tout entier n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8$.

Initialisation : $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 4 = 5$.

On a donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 8$.

Hérédité : On suppose que pour un entier naturel k, $u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 8$.

On démontre alors que $u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 8$.

De l'hypothèse de récurrence $u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 8$, on déduit que $\frac{1}{2}u_k \leqslant \frac{1}{2}u_{k+1} \leqslant \frac{1}{2} \times 8$

et $\frac{1}{2}u_k + 4 \leqslant \frac{1}{2}u_{k+1} + 4 \leqslant \frac{1}{2} \times 8 + 4$

et $u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 8$.

Conclusion : pour tout entier n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 8$.

2 **a)** La suite (a_n) est constante donc $a_{n+1} = a_n$ soit $a_n = \frac{1}{2}a_n + 4$ donc,

$$\frac{1}{2}a_n = 4 \text{ et } a_n = 8.$$

b) $u_{n+1} - 8 = \frac{1}{2}(u_n - 4) - 8 = \frac{1}{2}(u_n - 8)$.

La suite $(u_n - 8)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

c) On a donc $u_n - 8 = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

soit $u_n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 8$.

La limite de la suite (u_n) semble être 8.