ACTIVITÉS Correction

1 Nombre de parties d'un ensemble

1 **a)** Voici l'ensemble des parties de l'ensemble E : $\{a\,;b\,;c\}$, $\{a\,;b\}$, $\{a\,;c\}$, $\{a\}$, $\{b\,;c\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\varnothing$.
b) L'ensemble E possède donc 8 parties.

2 **a)** Il suffit d'ajouter à chaque fin de branche deux nouvelles possibilités (oui ou non) pour l'élément d.
b) On multiplie donc le nombre de parties de E par deux pour obtenir le nombre de parties de F. C'est-à-dire 16 parties.

3 Il semble que le nombre de parties d'un ensemble à n éléments soit égal à 2^n.

2 Raisonnement par récurrence

1 $p_1 = p_0 + \left(\frac{3}{2}\right)^{0+1} = \frac{3}{2}$.

$p_2 = p_1 + \left(\frac{3}{2}\right)^{1+1} = \frac{3}{2} + \frac{9}{4}$. Ainsi, $p_2 = \frac{15}{4}$.

2 **a)** $3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^0 - 1\right) = 3 \times 0 = 0$. Ainsi $p_0 = 3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^0 - 1\right)$ et la propriété $\mathrm{P}(0)$ est vraie.

b) On suppose donc que pour un certain entier naturel k, $p_k = 3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^k - 1\right)$.

c) On sait que $p_{k+1} = p_k + \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}$.

Donc $p_{k+1} = 3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^k - 1\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}$.

On en déduit que $p_{k+1} = 3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^k - 1 + \frac{3^k}{2^{k+1}}\right)$.

Soit $p_{k+1} = 3\left(\frac{3^k}{2^k} - 1 + \frac{3^k}{2^{k+1}}\right)$.

C'est-à-dire, $p_{k+1} = 3\left(\frac{2 \times 3^k}{2^{k+1}} - 1 + \frac{3^k}{2^{k+1}}\right)$

ou $p_{k+1} = 3\left(\frac{3^{k+1}}{2^{k+1}} - 1\right) = 3\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} - 1\right)$.

Ainsi, la propriété $\mathrm{P}(k+1)$ est vraie.