ÉPREUVE BLANCHE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

MATHÉMATIQUES

CORRECTION

Exercice 1 — 4 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. L'expression de la fonction dérivée f' est :	$\dfrac{3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$	$\dfrac{e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$	$-\dfrac{3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$	$\dfrac{1-3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$
2. L'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est :	$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}$	$y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$	$y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$	$y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}$
3. La limite en $+\infty$ de la fonction f est :	$0,99$	1	0	$+\infty$
4. La limite en $-\infty$ de la fonction f est :	$-\infty$	1	0	$0,01$
5. L'équation $f(x)=0,98$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ environ égale à :	$0,98$	$1,29$	$-1,3$	$0,95$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f. On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f''(x) = \dfrac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}$.

6. Le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$ est :	négative sur $]-\infty;0]$ et positive sur $[0;+\infty[$	positive sur $\mathbb{R}$	positive sur $]-\infty;0]$ et négative sur $[0;+\infty[$	négative sur $\mathbb{R}$
7. La fonction f est :	convexe sur $]-\infty;0]$ et concave sur $[0;+\infty[$	concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$	convexe sur $\mathbb{R}$	concave sur $\mathbb{R}$
8. La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f admet :	aucun point d'inflexion	un point d'inflexion de coordonnées $(0;0)$	un point d'inflexion de coordonnées $(0;\frac{3}{4})$	un point d'inflexion de coordonnées $(0;\frac{1}{2})$

Exercice 2 — 6 points

1. **(0,25pt)** Les coordonnées des deux vecteurs proposés sont :
$\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1-0\\1-0\\1-1\end{pmatrix}=\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EK}\begin{pmatrix}1-0\\\frac{1}{2}-0\\0-1\end{pmatrix}=\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$.

2. **(0,75pt)** On a : $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{EG}=2-2+0=0$. Donc ces deux vecteurs sont orthogonaux.
$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{EK}=2-1-1=0$. Donc ces deux vecteurs sont orthogonaux.
Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGK). Il est donc orthogonal à ce plan.

3. **(0,75pt)** Le résultat précédent montre qu'une équation du plan (EGK) est $2x-2y+z=d$, avec $d\in\mathbb{R}$.
En particulier $\mathrm{E}(0\ ;\ 0\ ;\ 1)\in(\mathrm{EGK}) \iff 0-0+1=d \iff d=1$.
On a donc $M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(\mathrm{EGK}) \iff 2x-2y+z=1$.

4. **(0,75pt)** La droite (d) étant orthogonale au plan (ECK), on peut prendre comme vecteur directeur de cette droite le vecteur $\overrightarrow{n}$. Elle contient F, donc :
$M(x\ ;\ y\ ;\ z)\in(d) \iff \overrightarrow{FM}=t\overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{lcl}x-1&=&t\times 2\\y-0&=&t\times(-2)\\z-1&=&t\times 1\end{array}\right.,t\in\mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{lcl}x&=&1+2t\\y&=&\ \ -2t\\z&=&1+t\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}$.

5. **(1pt)** L étant le projeté orthogonal de F sur le plan (EGK), L est un point de la droite (d) et du plan (EGK) : ses coordonnées vérifient donc les équations de (d) et du plan (EGK), donc le système :
$\left\{\begin{array}{lcl}x&=&1+2t\\y&=&\ \ -2t\\z&=&1+t\\2x-2y+z&=&1\end{array}\right.,t\in\mathbb{R}$
En remplaçant x, y, et z par leurs expressions en fonction de t dans la dernière équation on obtient :
$2(1+2t)-2\times(-2t)+1+t=1 \iff 2+4t+4t+t+1=1 \iff 9t=-2 \iff t=-\dfrac{2}{9}$.
On a donc : $x=1+2\times\left(-\dfrac{2}{9}\right)=1-\dfrac{4}{9}=\dfrac{5}{9}$; $y=-2\times\left(-\dfrac{2}{9}\right)=\dfrac{4}{9}$; $z=1-\dfrac{2}{9}=\dfrac{7}{9}$.
Conclusion : $\mathrm{L}\left(\dfrac{5}{9}\ ;\ \dfrac{4}{9}\ ;\ \dfrac{7}{9}\right)$.

6. **(0,5pt)** Avec $\mathrm{L}\left(\frac{5}{9}\ ;\ \frac{4}{9}\ ;\ \frac{7}{9}\right)$ et $\mathrm{F}(1\,;0\,;1)$, on a $\overrightarrow{LF}\begin{pmatrix}\frac{4}{9}\\-\frac{4}{9}\\\frac{2}{9}\end{pmatrix}$.
Donc $\mathrm{LF}^2=\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{2}{9}\right)^2=\frac{16}{81}+\frac{16}{81}+\frac{4}{81}=\frac{36}{81}$. D'où $\mathrm{LF}=\sqrt{\frac{36}{81}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

7. **(0,5pt)** Le triangle (EFG) est rectangle en F, donc on a $\mathcal{A}(\mathrm{EFG})=\mathrm{EF}\times\mathrm{FG}\times\dfrac{1}{2}=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.
Ainsi : $\mathcal{V}(\mathrm{EFGK})=\dfrac{1}{3}\times\mathcal{A}(\mathrm{EFG})\times\mathrm{BF}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{6}$.

8. **(0,5pt)** On a aussi $\mathcal{V}(\mathrm{EFGK})=\dfrac{1}{3}\times\mathcal{A}(\mathrm{EGK})\times\mathrm{LF}$, soit $\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}\times\mathcal{A}(\mathrm{EGK})\times\dfrac{2}{3}$ ou encore
$\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{9}\times\mathcal{A}(\mathrm{EGK})$, d'où $\mathcal{A}(\mathrm{EGK})=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{9}}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{9}{2}=\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{4}$.

9. **(1pt)** D'après le théorème de la droite des milieux les côtés du triangle (PMN) ont une longueur moitié de celles du triangle (EGK). L'aire du triangle (PMN) est donc égale à $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$ fois celle du triangle (EGK).
Donc $\mathcal{A}(\mathrm{PMN})=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{16}$.
Comme les trois points P, M et N appartiennent au plan (EGK) le triangle (PMN) appartient au plan (EGK) : la hauteur du tétraèdre FPMN est donc la même que celle du tétraèdre (EFGK) soit LF.
On a donc $\mathcal{V}(\mathrm{FPMN})=\dfrac{1}{3}\times\mathcal{A}(\mathrm{PMN})\times\mathrm{LF}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{16}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{24}$.

EXERCICE 3 — 5 points

1. **(0,25pt)** On a donc pour $n = 0$, $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{1+\frac{3}{2}} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}$.

2. (a) **(0,75pt)** Le fonction f est continue (comme fonction homographique) et strictement croissante (énoncé) sur $\left]-\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$. De plus : $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}} f(x) = -\infty < 0,88 < \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \frac{4}{3}$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution α à l'équation $f(x) = 0,88$ sur $\left]-\frac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

   (b) **(1pt)** Initialisation : On a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{4}{5}$; de plus $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{4}{5} \leqslant 2$, donc :
   $\frac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$: l'encadrement est vrai au rang 0.

   Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang k : $\frac{1}{2} \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$. On veut montrer qu'elle est vraie au rang $k+1$: $\frac{1}{2} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 2$. On a :

   $\frac{1}{2} \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 2$

   $\iff f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_k) \leqslant f(u_{k+1}) \leqslant f(2)$ (f étant strictement croissante, les images sont rangées dans le même ordre)

   $\iff \frac{4}{5} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \frac{8}{7} \iff \frac{1}{2} \leqslant \frac{4}{5} \leqslant u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant \frac{8}{7} \leqslant 2$. L'encadrement est donc vrai au rang $k+1$.

   Conclusion : L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $k \geqslant 0$, il est vrai au rang $k+1$: par le principe de récurrence pour tout entier naturel n, on a : $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

   (c) **(0,25pt)** La suite (u_n) est croissante et elle majorée par 2, elle est donc convergente vers une limite ℓ telle que : $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 2$.

   (d) **(0,75pt)** La fonction f est continue car dérivable au moins sur $\mathbb{R}^+$ donc la limite ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
   On résout cette équation :
   $$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\iff \frac{4\ell}{1+3\ell} = \ell \iff 4\ell = \ell(1+3\ell) \iff 0 = \ell(1+3\ell-4)\\ &\iff \ell(3\ell-3) = 0 \iff 3\ell(\ell-1) = 0 \iff l = 0 \ \ ou\ \ l = 1\end{aligned}$$
   Comme $\ell \geqslant \frac{1}{2}$, la seule solution possible est 1 ; la suite (u_n) converge vers 1.

3. (a) **(0,75pt)** Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}}$ soit en utilisant la définition de u_{n+1} :
   $v_{n+1} = \dfrac{\frac{4u_n}{1+3u_n}}{1-\frac{4u_n}{1+3u_n}}$ soit en multipliant chaque terme par $1+3u_n$:
   $v_{n+1} = \frac{4u_n}{1+3u_n-4u_n} = \frac{4u_n}{1-u_n} = 4\frac{u_n}{1-u_n} = 4v_n$.
   L'égalité, vraie pour tout naturel n, $v_{n+1} = 4v_n$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison 4, de premier terme $v_0 = \frac{u_0}{1-u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.
   On sait qu'alors , pour tout entier naturel n, $v_n = 1 \times 4^n = 4^n$.

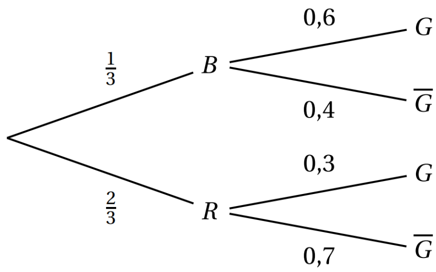
   (b) **(0,75pt)** Quel que soit $n \in \mathbb{N}$,
   $v_n = \frac{u_n}{1-u_n} \iff v_n(1-u_n) = u_n \iff v_n - u_nv_n = u_n \iff v_n = u_nv_n + u_n \iff v_n = u_n(v_n+1)$.
   Comme $v_n = 4^n, v_n \geqslant 1$, donc $v_n + 1 \geqslant 2$, donc $v_n + 1 \neq 0$ et finalement en multipliant par $\frac{1}{v_n+1}$, on obtient $u_n = \frac{v_n}{v_n+1}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

   (c) **(0,5pt)** On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4^n$, d'où en remplaçant dans l'écriture précédente :
   $u_n = \frac{4^n}{4^n+1}$ et en multipliant par $\frac{1}{4^n}$: $u_n = \frac{1}{1+\frac{1}{4^n}}$. Or $\frac{1}{4^n} = \frac{1^n}{4^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0,25^n$, d'où $u_n = \frac{1}{1+0,25^n}$.
   Comme $0 < 0,25 < 1$, on peut dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,25^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1+0} = 1$.

Exercice 4 **5 points**

1. (a) **(0,25pt)** Si la case est blanche on tire 1 seul jeton. Comme il y a 3 résultats impairs sur 5 numéros on a : $P_B(G) = \dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{10} = 0,6$.

   (b) **(0,5pt)** Voici l'arbre de probabilité complet :



2. (a) **(0,5pt)** D'après la loi des probabilités totales :
   $P(G) = P(B \cap G) + P(R \cap G) = P(B) \times P_B(G) + P(R \cap G) = P(R) \times P_R(G) = \dfrac{1}{3} \times 0,6 + \dfrac{2}{3} \times 0,3 = 0,2 + 0,2 = 0,4.$

   (b) **(0,5pt)** Il faut trouver $P_G(B) = \dfrac{P(G \cap B)}{P(G)} = \dfrac{P(B \cap G)}{P(G)} = \dfrac{0,2}{0,4} = 0,5.$

3. **(0,5pt)** On a : $P(B) \times P(G) = \dfrac{1}{3} \times 0,4 = \dfrac{0,4}{3} = \dfrac{4}{30} = \dfrac{2}{15}.$
   De plus : $P(B \cap G) = \dfrac{1}{3} \times 0,6 = 0,2 = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}.$
   Donc $P(B) \times P(G) \neq P(B \cap G)$: les événements ne sont pas indépendants.

4. (a) **(0,75pt)** On répète 10 fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli de succès "gagner une partie" et de probabilités $p = 0,4$. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. Donc X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(10\ ;\ 0,4)$.

   (b) **(0,5pt)** On a $P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,4^3 \times (1 - 0,4)^7 = 120 \times 0,4^3 \times 0,6^7 \approx 0,215.$

   (c) **(0,5pt)** La calculatrice donne $P(X \geqslant 4) \approx 0,618$.
   Il y a plus de 6 chances sur 10 de gagner au moins 4 parties.

5. (a) **(0,5pt)** On a $p_n = P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,6^n$.

   (b) **(0,5pt)** Il faut trouver le plus petit entier n tel que $p_n \geqslant 0,99$. Avec l'aide du tableur de la calculatrice, on obtient cette valeur avant $n = 10$.
   Il faut donc jouer au moins 10 parties pour avoir une probabilité d'en gagner une avec une probabilité d'au moins 99 %.