# ÉPREUVE BLANCHE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

**Série Générale**

**Durée de l'épreuve : 4 heures** **Lundi 11 mars 2024**

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de la page 1/3 à la page 3/3.

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire "type collège" est autorisé.

Le candidat traitera les 4 exercices proposés.

**RENDRE LE SUJET AVEC LA COPIE**

## Exercice 1 — 4 points

*Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.* ***Entourer la bonne réponse sur le sujet sans justifier****.*

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

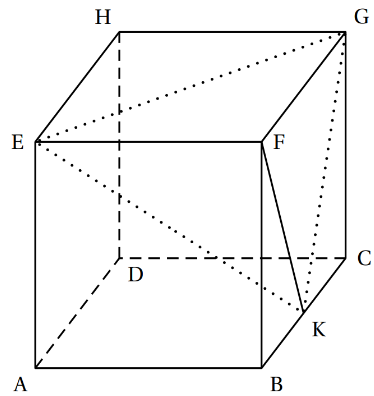
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. L'expression de la fonction dérivée $f'$ est : | $\dfrac{3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$ | $\dfrac{e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$ | $-\dfrac{3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$ | $\dfrac{1-3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}$ |
| 2. L'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est : | $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{4}$ | $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$ | $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$ | $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{4}$ |
| 3. La limite en $+\infty$ de la fonction $f$ est : | $0,99$ | $1$ | $0$ | $+\infty$ |
| 4. La limite en $-\infty$ de la fonction $f$ est : | $-\infty$ | $1$ | $0$ | $0,01$ |
| 5. L'équation $f(x)=0,98$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$ environ égale à : | $0,98$ | $1,29$ | $-1,3$ | $0,95$ |

On admet que la fonction $f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $f''$ la fonction dérivée seconde de la fonction $f$. On admet que $f''$ est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f''(x) = \dfrac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6. Le signe de la fonction $f''$ sur $\mathbb{R}$ est : | négative sur $]-\infty;0]$ et positive sur $[0;+\infty[$ | positive sur $\mathbb{R}$ | positive sur $]-\infty;0]$ et négative sur $[0;+\infty[$ | négative sur $\mathbb{R}$ |
| 7. La fonction $f$ est : | convexe sur $]-\infty;0]$ et concave sur $[0;+\infty[$ | concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$ | convexe sur $\mathbb{R}$ | concave sur $\mathbb{R}$ |
| 8. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet : | aucun point d'inflexion | un point d'inflexion de coordonnées $(0;0)$ | un point d'inflexion de coordonnées $(0;\frac{3}{4})$ | un point d'inflexion de coordonnées $(0;\frac{1}{2})$ |

## Exercice 2 — 6 points

On considère un cube ABCDEFGH, d'arrête de longueur 1, et on appelle K le milieu du segment [BC].




On se place dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$ et on considère le tétraèdre EFGK.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$$

où $\mathcal{B}$ désigne l'aire d'une base et $h$ la hauteur relative à cette base.

On donne les coordonnées des points : $E(0;0;1)$ ; $F(1;0;1)$ ; $G(1;1;1)$ et $K(1;\frac{1}{2};0)$.

1. Préciser les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EK}$.
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (EGK).
3. Démontrer que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne : $2x - 2y + z - 1 = 0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(d)$ orthogonale au plan (EGK) passant par F.
5. Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9}\ ;\ \frac{4}{9}\ ;\ \frac{7}{9}\right)$.
6. Montrer que la distance du point $F$ au plan $(EGK)$ est égale à $\dfrac{2}{3}$.
7. Calculer l'aire du triangle EFG.
   En déduire que le volume du tétraèdre EFGK est égal à $\dfrac{1}{6}$.
8. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle EGK.
9. On considère les points P milieu du segment [EG], M milieu du segment [EK] et N milieu du segment[GK].
   Déterminer le volume du tétraèdre FPMN.

## Exercice 3 — 5 points

Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$ par : $f(x) = \dfrac{4x}{1+3x}$. Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont bien définies.

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$.

1. Calculer $u_1$.
2. On admet que la fonction $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.
   (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0,88$ admet une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, on a : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.
   (d) On appelle $\ell$ la limite de la suite $(u_n)$. Déterminer la valeur de $\ell$.
3. On considère la suite $(v_n)$ définie, pour tout entier naturel $n$, par : $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison 4.
   En déduire, pour tout entier naturel $n$, l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = \dfrac{v_n}{v_n+1}$.
   (c) Montrer alors que, pour tout entier naturel $n$ , on a : $u_n = \dfrac{1}{1+0,25^n}$.
   Retrouver par le calcul la limite de la suite $(u_n)$.

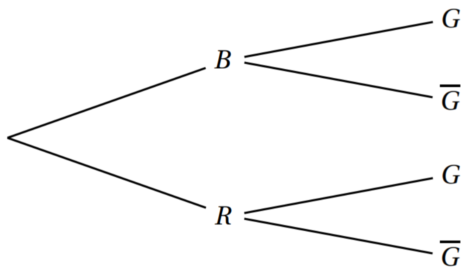
## Exercice 4 — 5 points

Lors d'une kermesse, un organisateur de jeux dispose, d'une part, d'une roue comportant quatre cases blanches et huit cases rouges et, d'autre part, d'un sac contenant cinq jetons portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5.
Le jeu consiste à faire tourner la roue, chaque case ayant la même probabilité d'être obtenue, puis à extraire un ou deux jetons du sac selon la règle suivante :

- si la case obtenue par la roue est blanche, alors le joueur extrait un jeton du sac ;
- si la case obtenue par la roue est rouge, alors le joueur extrait successivement et sans remise deux jetons du sac.

Le joueur gagne si le ou les jetons tirés portent tous un numéro impair.

1. Un joueur fait une partie et on note $B$ l'événement « la case obtenue est blanche », $R$ l'événement « la case obtenue est rouge » et $G$ l'événement « le joueur gagne la partie ».
   (a) Donner la valeur de la probabilité conditionnelle $P_B(G)$.
   (b) On admettra que la probabilité de tirer successivement et sans remise deux jetons impairs est égale à $0,3$.
   Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant :




2. (a) Montrer que $P(G) = 0,4$.
   (b) Un joueur gagne la partie.
   Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une case blanche en lançant la roue ?
3. Les événements $B$ et $G$ sont-ils indépendants ? Justifier.

Soit $n$ un entier naturel non nul. Le joueur joue $n$ parties. Les jetons tirés sont remis dans le sac après chaque partie.
$X_n$ est la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.

4. On suppose que $n = 10$.
   (a) Montrer que $X_n$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) Déterminer, en détaillant vos calculs, la probabilité, arrondie à $10^{-3}$ près, que le joueur gagne exactement trois parties sur les dix parties jouées.
   (c) Calculer, en vous aidant de la calculatrice, $P(X \geqslant 4)$ arrondie à $10^{-3}$ près. Donner une interprétation du résultat obtenu.
5. Un joueur fait $n$ parties et on note $p_n$ la probabilité de l'événement « le joueur gagne au moins une partie ».
   (a) Montrer que $p_n = 1 - 0,6^n$.
   (b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier $n$ pour laquelle la probabilité de gagner au moins une partie est supérieure ou égale à $0,99$.