ÉPREUVE BLANCHE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

CORRECTION

Mercredi 12 février 2025

Exercice 1 — 5 points

1. **(1 pt) Réponse c.** On a $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}$. $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{AB}) \iff \overrightarrow{\text{A}M} = t\overrightarrow{\text{AB}}, t \in \mathbb{R} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& 3t\\ y-0 &=& 1t\\ z-3 &=& -3t,\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$
$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+3t\\ y &=& t\\ z &=& 3-3t\end{array}\right. \quad t\in\mathbb{R}$

2. **(1 pt) Réponse d.**

3. **(1 pt) Réponse b.** Les deux droites ont pour vecteurs directeurs respectifs : $\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.
Les deux droites sont sécantes s'il existe deux réels t et k tels que :
$\left\{\begin{array}{rcl} 3+4t &=& -2+3k\\ 6t &=& -1-2k\\ 4-2t &=& 1+k\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 4t &=& 3k-5\\ 6t &=& -2k-1\\ -2t &=& k-3\end{array}\right.$
Par différence de la ligne 1 et de la ligne 2, on obtient$-2t = 5k-4 = k-3$ (ligne 3) soit $4k = 1 \iff k = \dfrac{1}{4}$, puis comme $-2t = k-3 = \dfrac{1}{4} - 3 = -\dfrac{11}{4}$, d'où $t = \dfrac{11}{8}$, mais la première ligne donne $4t = 3k-5 = \dfrac{3}{4} - 5 = -\dfrac{17}{4}$, d'où $t = \dfrac{17}{8}$: ceci n'est pas possible : les deux droites ne sont pas sécantes.
Les deux droites ne sont pas confondues.

4. **(1 pt) Réponse a.** Le vecteur $\overrightarrow{n}$ vecteur directeur de (d) est un vecteur normal au plan (P) . On a donc
$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (P) \iff \overrightarrow{\text{I}M}\cdot\overrightarrow{n} = 0 \iff 4(x-2)+6(y-1)-2(z-0) = 0 \iff 4x-8+6y-6-2z = 0 \iff 4x+6y-2z-14 = 0 \iff 2x+3y-z-7 = 0$:

5. **(1 pt) Réponse b.** Le vecteur normal de (P) et celui de (P') sont colinéaires d'après leurs équations cartésiennes. Ainsi, les deux plans sont strictement parallèles. Ils ne sont pas confondus car $-5 \neq -20$.

Exercice 2 — 7 points

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

1. **(0,5 pt)** On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{x-4}=+\infty$, donc par produit de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.
2. **(0,5 pt)** On a $g(x)=x\mathrm{e}^{x-4}+2\mathrm{e}^{x-4}-2=x\mathrm{e}^{x}\times\mathrm{e}^{-4}+2\mathrm{e}^{x-4}-2$. On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty}x\mathrm{e}^{x}=0$; donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-4}x\mathrm{e}^{x}=0$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{x-4}=0$, donc par somme de limites : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-2$.
3. **(1 pt)** $g'(x)=1\times\mathrm{e}^{x-4}+(x+2)\times1\times\mathrm{e}^{x-4}=\mathrm{e}^{x-4}(1+x+2)=\mathrm{e}^{x-4}(x+3)$.
   On sait que quel soit $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x-4}>0$; le signe de $g'(x)$ est donc celui de $x+3$ qui s'annule pour $x=-3$ est positif pour $x>-3$ et négatif pour $x<-3$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-2	$\searrow$	$\approx -2{,}001$	$\nearrow$	$+\infty$

   On a $g(-3)=(-3+2)\mathrm{e}^{-3-4}-2=-\mathrm{e}^{-7}-2\approx-2,001$.
4. (a) **(0,75 pt)** La fonction g est strictement croissante et continue sur l'intervalle $]-3\ ;\ +\infty[$. De plus $f(-3)\simeq -2,001<0<\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$. Ainsi, d'après le corolaire du TVI, il existe une unique solution α à l'équation $g(x)=0$.
   (b) **(0,25 pt)** La calculatrice donne $g(3,069)\approx-0,002006$ et $g(3,070)\approx0,00038$, donc $\alpha\approx3,070$ à 10^{-3} près.
   (c) **(0,5 pt)** Conclusion :

x	$-\infty$		$3,070$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

5. (a) **(0,5 pt)** $g''(x)=e^{x-4}\times1\times(x+3)+e^{x-4}\times1=e^{x-4}(x+3+1)=(x+4)e^{x-4}$.
   (b) **(1 pt)** $g''(x)=0\iff x+4=0$ car $e^{x-4}>0$ quelque soit $x\in\mathbb{R}$. Donc $x=-4$. Ainsi :
   $g''(x)>0\iff x>-4$ donc g est convexe sur $]-4;+\infty[$.
   $g''(x)<0\iff x<-4$ donc g est concave sur $]-\infty;-4[$.
   Il y a une point d'inflexion de coordonnées $(-4;g(-4))=(-4;-2,00067)$.

Partie B : Étude de la fonction f

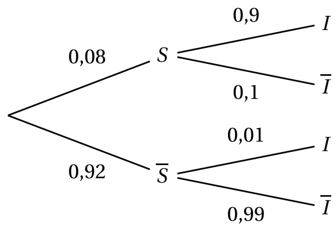
1. **(0,5 pt)** $f(x)=0\iff x^2-x^2\mathrm{e}^{x-4}=0\iff x^2\left(1-\mathrm{e}^{x-4}\right)=0\iff\begin{cases}x^2=0\text{ ou}\\1-\mathrm{e}^{x-4}=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=0\text{ ou}\\1=\mathrm{e}^{x-4}\end{cases}\iff$ $\begin{cases}x=0\text{ ou}\\0=x-4\end{cases}\iff\begin{cases}x=0\text{ ou}\\4=x\end{cases}$. L'équation a deux solutions : 0 et 4.
2. **(1 pt)** De la question 4 de la partie A, ainsi que du tableau de signes de la fonction $-x$, on déduit que :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$			$-$		0	$+$	
$-x$		$+$	0		$-$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5,71	$\searrow$	$-\infty$

3. **(0,5 pt)** D'après la question précédente sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction est croissante puis décroissante : $f(\alpha)$ est donc le maximum de la fonction sur cet intervalle.
   On a vu à la question **A. 3.** que α est le réel tel que $g(\alpha)=0\iff(\alpha+2)\mathrm{e}^{\alpha-4}-2=0\iff(\alpha+2)\mathrm{e}^{\alpha-4}=2\iff$ $\mathrm{e}^{\alpha-4}=\dfrac{2}{\alpha+2}$. Donc $f(\alpha)=\alpha^2\left(1-\mathrm{e}^{x-4}\right)=\alpha^2\left(1-\dfrac{2}{\alpha+2}\right)=\alpha^2\left(\dfrac{\alpha+2-2}{\alpha+2}\right)=\alpha^2\times\dfrac{\alpha}{\alpha+2}$.
   Finalement $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}\approx5,71$

Exercice 3 — 4 points

1. **(0,5 pt)** Voici l'arbre pondéré attendu :



2. (a) **(0,5 pt)** On a $P(S \cap I) = P(S) \times P_S(I) = 0,08 \times 0,9 = 0,072$

   (b) O**(0,75 pt)** n a de même $P\left(\overline{S} \cap I\right) = P\left(\overline{S}\right) \times P_{\overline{S}}(I) = 0,92 \times 0,01 = 0,0092$.
   D'après la loi des probabilités totales : $P(I) = P(S \cap I) + P\left(\overline{S} \cap I\right) = 0,072 + 0,0092 = 0,0812$.

   (c) **(0,5 pt)** $P_I(S) = \dfrac{P(I \cap S)}{P(I)} = \dfrac{0,072}{0,0812} \simeq 0,887$ soit 0,89 au centième près.

3. (a) **(0,75 pt)** On répète 50 fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli de succès : "avoir un spam" de probabilité $p = 0,08$. Z est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. Ainsi Z suit une loi Binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,08$.

   (b) **(0,5 pt)** On a $P(Z = 0) = 0,08^0 \times 0,92^{50} \approx 0,015466$
   $P(Z = 1) = \binom{50}{1} \times 0,08 \times 0,92^{49} \approx 0,067426$
   Donc : $P(Z \geqslant 2) = 1 - [P(Z = 0) + P(Z = 1)] = 1 - (0,015466 + 0,067426) \approx 0,917$, soit $0,92$ au centième près.

   (c) **(0,5 pt)** On trouve $k = 7$. Il y a au moins 95 % de chances que le nombre de spams dans un échantillon de 50 courriels soit inférieur ou égal à 7.

Exercice 4 — 4 points

1. **(0,5 pt)** "Un volume constant de 2200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B." donc $a_n + b_n = 2200$.

2. **(0,75 pt)** Au début du $n+1$-ième jour, la bassin A contient a_n, on ajoute 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B soit $0,15b_n$ et on enlève 10 % du volume présent dans A au début de la journée :
   $a_{n+1} = a_n + 0,15b_n - 0,1a_n = a_n + 0,15(2200 - a_n) - 0,1a_n = 0,75a_n + 330 = \dfrac{3}{4}a_n + 330$.

   On a bien, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + 330$.

3. (a) **(0,75 pt)** Pour tout entier naturel n, on a

   $$\begin{array}{lll} u_{n+1} & = a_{n+1} - 1320 & \text{définition de } u_n \\ & = \frac{3}{4}a_n + 330 - 1320 & \text{question 2.} \\ & = \frac{3}{4}a_n - 990 & \\ & = \frac{3}{4}(a_n - 1320) & \\ & = \frac{3}{4}u_n & \text{définition de } u_n \end{array}$$

   On reconnait la définition d'une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$. Son premier terme est :
   $u_0 = a_0 - 1320 = 800 - 1320 = -520$.

   (b) **(0,5 pt)** On a donc, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n = -520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

   (c) **(0,5 pt)** Par définition de u_n, on a :
   $u_n = a_n - 1320 \iff a_n = u_n + 1320 \iff a_n = 1320 - 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

4. **(1 pt)** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} -520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = -520 \times 0 = 0$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ comme $-1 < q = \frac{3}{4} < 1$.
   Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + 1320) = 0 + 1320 = 1320$.
   Enfin, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (2200 - a_n) = 2200 - 1320 = 880$.
   On peut donc en déduire que le volume d'eau du bassin A ne dépassera jamais 1320 m^3 et que celui du bassin B ne dépassera jamais 880 m^3, après un très grand nombre de jours de fonctionnement.