Nom Prénom : .... Professeur : .... Classe : ....

ÉPREUVE BLANCHE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

Série Générale

Durée de l'épreuve : 4 heures **Mercredi 12 février 2025**

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de la page 1/3 à la page 3/3.

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L'usage de la calculatrice sans mémoire "type collège" est autorisé.

Le candidat traitera les 4 exercices proposés.

RENDRE LE SUJET AVEC LA COPIE

Exercice 1 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Les cinq questions sont indépendantes.

Entourer la bonne réponse sur le sujet sans justifier.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\,)$.

1. On considère les points A$(1\,;\,0\,;\,3)$ et B$(4\,;\,1\,;\,0)$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

   a. $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3+t \\ y &=& 1 \\ z &=& -3+3t \end{array}\right.$ **b.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+4t \\ y &=& t \\ z &=& 3 \end{array}\right.$ **c.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+3t \\ y &=& t \\ z &=& 3-3t \end{array}\right.$ **d.** $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 4+t \\ y &=& 1 \\ z &=& 3-3t \end{array}\right.$

2. On considère la droite (d) de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3+4t \\ y &=& 6t \\ z &=& 4-2t \end{array}\right.$ avec $t \in \mathbb{R}$.

   Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite (d) ?

   a. M$(7\,;\,6\,;\,6)$ **b.** N$(3\,;\,6\,;\,4)$ **c.** P$(4\,;\,6\,;\,-2)$ **d.** R$(-3\,;\,-9\,;\,7)$

3. On considère la droite (d') de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2+3k \\ y &=& -1-2k \\ z &=& 1+k \end{array}\right.$ avec $k \in \mathbb{R}$.

   Les droites (d) et (d') sont :

   a. sécantes **b.** non coplanaires **c.** parallèles **d.** confondues

4. On considère le plan (P) passant par le point I$(2\,;\,1\,;\,0)$ et perpendiculaire à la droite (d).
   Une équation du plan (P) est :

   a. $2x+3y-z-7=0$ **b.** $-x+y-4z+1=0$ **c.** $4x+6y-2z+9=0$ **d.** $2x+y+1=0$

5. On considère le plan (P') d'équation cartésienne $2x-y+3z-5=0$ et le plan (P'') d'équation cartésienne $10x-5y+15z-20=0$. (P') et (P'') sont :

   a. sécants **b.** strictement parallèles **c.** confondus **d.** aucune des trois réponses précédentes

Exercice 2 — 7 points

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x-4} - 2$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Démontrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2.
3. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa dérivée.
   Calculer $g'(x)$ pour tout réel x puis dresser le tableau de variations de g.
4. (a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   (b) Donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α à l'aide de la calculatrice.
   (c) En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
5. (a) Démontrer que $g''(x) = (x+4)e^{x-4}$.
   (b) Étudier la convexité de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et donner les coordonnées du ou des éventuels points d'inflexion.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x^2\mathrm{e}^{x-4}$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   On admet par ailleurs que, pour tout réel x, $f'(x) = -xg(x)$ où la fonction g est celle définie à la partie A.
   Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$ est égal à $\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

Exercice 3 — 4 points

Une entreprise reçoit quotidiennement de nombreux courriels (courriers électroniques). Parmi ces courriels, 8 % sont du « spam », c'est-à-dire des courriers à intention publicitaire, voire malveillante, qu'il est souhaitable de ne pas ouvrir.
On choisit au hasard un courriel reçu par l'entreprise. Les propriétés du logiciel de messagerie utilisé dans l'entreprise permettent d'affirmer que :

- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que c'est un spam est égale à $0,9$.
- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que ce n'est pas un spam est égale à $0,01$.

On note :

- S l'évènement « le courriel choisi est un spam ».
- I l'évènement « le courriel choisi est classé comme indésirable par le logiciel de messagerie ».
- $\overline{S}$ et $\overline{I}$ les évènements contraires de S et I respectivement.

1. Modéliser la situation étudiée par un arbre pondéré, sur lequel on fera apparaître les probabilités associées à chaque branche.
2. (a) Démontrer que la probabilité que le courriel choisi soit un message de spam et qu'il soit classé indésirable est égale à $0,072$.
   (b) Calculer la probabilité que le message choisi soit classé indésirable.
   (c) Le message choisi est classé comme indésirable. Quelle est la probabilité que ce soit effectivement un message de spam ? On donnera un résultat arrondi au centième.
3. On choisit au hasard 50 courriels parmi ceux reçus par l'entreprise. On admet que ce choix se ramène à un tirage au hasard avec remise de 50 courriels parmi l'ensemble des courriels reçus par l'entreprise.
   On appelle Z la variable aléatoire dénombrant les courriels de spam parmi les 50 choisis.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Z, et quels sont ses paramètres ? Justifier.
   (b) Quelle est la probabilité que, parmi les 50 courriels choisis, deux au moins soient du spam ? On détaillera le raisonnement et on donnera un résultat arrondi au centième.
   (c) Déterminer la plus petite valeur de l'entier k telle que $P(Z \leqslant k) \geqslant 0,95$ en argumentant à l'aide de la calculatrice. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 4 **4 points**

Un volume constant de 2200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.
Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.
On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient 1400 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du n-ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.
3. Pour tout entier naturel n, on note $u_n = a_n - 1320$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
4. Calculer, en détaillant les étapes, la limite de chacune des suites et interpréter.