CHAPITRE 1 : Calcul numérique

1 Nombres relatifs

1.1 Additionner et soustraire des nombres relatifs

Simplification des écritures
- Si les parenthèses sont précédées du signe $+$, on peut enlever le signe $+$ et les parenthèses sans changer le signe.
- Si les parenthèses sont précédées du signe $-$, on peut enlever le signe $-$ et les parenthèses mais il faut changer le signe.

Exemples
$(-5)+(-3)=-5-3=-(5+3)=-8$
$(-5)-(-3)=-5+3=-(5-3)=-2$

Règles de calcul
Si deux nombres relatifs ont le même signe alors leur somme a :
- le même signe que les deux nombres.
- pour distance à zéro, la somme de leurs distances à zéro.

Si deux nombres relatifs sont de signe contraire alors leur somme a :
- le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro.
- pour distance à zéro, la différence de leurs distances à zéro.

Exemples
$12+(-9)=12-9=3$ $\qquad$ $-7,8+5,2=-(7,8-5,2)=-2,6$
$12,8+15,6=28,4$ $\qquad$ $-3,2+(-5,9)=-(3,2+5,9)=-9,1$

Définition
Deux nombres sont opposés si leur somme est égale à zéro. L'opposé de b est le nombre $-b$: $\quad b+(-b)=0$.

Propriété
Soustraire un nombre revient à additionner son opposé.

Exemples
$-12-7=-12+(-7)=-(12+7)=-19$
$5-6=5+(-6)=-(6-5)=-1$

1.2 Multiplier et diviser des nombres relatifs

Règle des signes
- Le produit et le quotient de deux nombres de même signe sont positifs.
- Le produit et le quotient de deux nombres de signes contraires sont négatifs.

Exemples
$(+3)\times(+4)=+12$ $\qquad$ $-5\times(-2)=+10$ $\qquad$ $-4\times(+6)=-24$

$\dfrac{+14}{+5}=+2,8$ $\qquad$ $\dfrac{-14}{-5}=+2,8$ $\qquad$ $\dfrac{-14}{+5}=-2,8$

Règles de calcul
- Pour calculer un produit (ou un quotient), on détermine son signe puis on multiplie (ou on divise) les distances à zéro.
- Le produit d'un nombre relatif par 0 est toujours égal à 0 : $a\times 0=0$.
- Le produit d'un nombre relatif par -1 est égal à son opposé : $a\times(-1)=-a$.
- a et b désignent des nombres relatifs ($b\neq 0$ alors : $\dfrac{-a}{-b}=\dfrac{a}{b}$ $\qquad$ $\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}=-\dfrac{a}{b}$.

Exemples
$-2,6\times 0=0$ $\qquad$ $-1\times 3=-3$

$\dfrac{-5}{-3}=\dfrac{5}{3}$ $\qquad$ $\dfrac{-2}{13}=\dfrac{2}{-13}=-\dfrac{2}{13}$

2 Fractions

2.1 Transformer l'écriture d'une fraction

Règle

On ne change pas la valeur d'une fraction si l'on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

Si a et b dont des nombres relatifs ($b \neq 0$) : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{k \times a}{k \times b} = \dfrac{ka}{kb}$.

Exemples

$\dfrac{12}{7} = \dfrac{12 \times 5}{7 \times 5} = \dfrac{60}{35}$ $\qquad$ $\dfrac{48}{26} = \dfrac{24 \times 2}{13 \times 2} = \dfrac{24}{13}$

2.2 Additionner et soustraire des fractions

Méthodes

- Pour additionner ou soustraire deux fractions qui ont le même dénominateur, on additionne les numérateurs entre eux et on garde le dénominateur commun.

  Si a, b et c désignent des nombres relatifs ($b \neq 0$) : $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$ et $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{b} = \dfrac{a-c}{b}$.

- Pour additionner deux fractions qui n'ont pas le même dénominateur, on commence par les écrire avec le même dénominateur puis on applique la règle précédente.

Exemples

$\dfrac{5}{13} + \dfrac{22}{13} = \dfrac{5+22}{13} = \dfrac{27}{13}$ $\qquad$ $\dfrac{5}{13} - \dfrac{22}{13} = \dfrac{5-22}{13} = \dfrac{-17}{13}$

$\dfrac{2}{7} + \dfrac{3}{5} = \dfrac{2 \times 5}{7 \times 5} + \dfrac{3 \times 7}{5 \times 7} = \dfrac{10}{35} + \dfrac{21}{35} = \dfrac{10+21}{35} = \dfrac{31}{35}$

2.3 Multiplier et diviser des fractions

Méthodes

- Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et on multiplie les dénominateurs entre eux.

  Si a, b, c et d désignent des nombres relatifs (b et $d \neq 0$) : $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times c}{b \times d}$.

- Diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse.

  Si a, b, c et d désignent des nombres relatifs (b, c et $d \neq 0$) : $\dfrac{a}{b} = a \times \dfrac{1}{b}$ $\qquad$ $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{a \times d}{b \times c}$.

Exemples

$\dfrac{2}{3} \times \dfrac{7}{9} = \dfrac{2 \times 7}{3 \times 9} = \dfrac{14}{27}$ $\qquad$ $\dfrac{5}{3} = 5 \times \dfrac{1}{3}$ $\qquad$ $\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{7}{9}} = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{9}{7} = \dfrac{4 \times 9}{5 \times 7} = \dfrac{36}{35}$.

Remarques

- Pour calculer une fraction d'une quantité, on multiplie la fraction par la quantité.

- Si a, b, c et d sont des nombres relatifs (b et $d \neq 0$) : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ revient à dire $a \times d = c \times b$.

Exemples

$\dfrac{4}{5}$ de 12 est égal à $\dfrac{4}{5} \times 12 = \dfrac{4 \times 12}{5} = \dfrac{48}{5}$

Si $\dfrac{x}{14} = \dfrac{1}{5}$ alors $5x = 14$ soit $x = \dfrac{14}{5}$

3 Puissances

Définitions

Soit a un nombre non nul et n un nombre entier supérieur ou égal à 2.

- Le produit $\underbrace{a \times a \times ... \times a \times a}_{\text{n facteurs}}$ se note a^n et se lit "*a exposant n*"
- L'écriture a^{-n} désigne l'inverse de a^n : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Cas particuliers

$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$ $\qquad$ $a^1 = a$ $\qquad$ $a^{-1} = \dfrac{1}{a} \quad (a \neq 0)$

Exemples

$4^0 = 1$

$8^1 = 8$

$(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81$

$\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5}$

3.1 Calculer avec les puissances

Exemples de calcul

Dans certains cas, il est possible de simplifier des calculs dans lesquels interviennent des nombres écrits sous forme de puissance.

$4^6 \times 64 = 4^6 \times 4^3 = \underbrace{\overbrace{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}^{\text{6 facteurs}} \times \overbrace{4 \times 4 \times 4}^{\text{3 facteurs}}}_{\text{9 facteurs}} = 4^9.$ Ici on a additionné les exposants.

$\dfrac{6^3}{6^4} = \dfrac{6 \times 6 \times 6}{6 \times 6 \times 6 \times 6} = \dfrac{1}{6} = 6^{-1}.$ Ici on a soustrait les exposants.

$(10^5)^3 = 10^5 \times 10^5 \times 10^5 = 10^{15}.$ Ici on a multiplié les exposants.

Priorité opératoire

Dans une suite de calculs, on effectue dans l'ordre :

les calculs entre parenthèses - les puissances - les multiplications et les divisions - les additions et les soustractions.

Exemples

$7 + 3^5 = 7 + 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 7 + 243 = 250$

$-2^4 = -2 \times 2 \times 2 \times 2 = -16$

$(3 - 5) \times 4^2 + 6 = -2 \times 4^2 + 6 = -2 \times 16 + 6 = -32 + 6 = -26$

3.2 Notation scientifique

Propriété

Il existe une manière unique d'écrire un nombre décimal sous la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$ et n un nombre entier.

Remarque

$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times ... \times 10 \times 10}_{\text{n facteurs}} = 1\underbrace{00...0}_{\text{n zéros}}$

$10^{-n} = \dfrac{1}{10^n} = \dfrac{1}{\underbrace{10 \times 10 \times ... \times 10 \times 10}_{\text{n facteurs}}} = 0,\underbrace{00...01}_{\text{n chiffres après la virgule}}$

Exemple

$2\,007 = 2,007 \times 10^3$

$0,0425 = 4,25 \times 10^{-2}$