1 Vocabulaire usuel des suites

1.1 Sens de variation d'une suite

Définitions

(u_n) est une suite définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels.

- Dire que la suite (u_n) est croissante signifie que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \geq u_n$.
- Dire que la suite (u_n) est décroissante signifie que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq u_n$.

Méthodes (étude du sens de variation)

- Signe de la différence : si pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$ (resp. $u_{n+1} - u_n \leq 0$) alors la suite (u_n) est croissante (resp. décroissante).
- Comparaison de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 pour les suites telles que pour tout n , $u_n > 0$: si pour tout entier naturel n , $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ (resp. $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$) alors la suite (u_n) est croissante (resp. décroissante).
- Suite telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = f(n)$: si la fonction f est croissante (resp. décroissante) sur $]0; +\infty[$ alors la suite (u_n) est croissante (resp. décroissante).
- Raisonnement par récurrence : si pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$) alors la suite (u_n) est croissante (resp. décroissante).

1.2 Suites majorées, minorées, bornées

Définitions

(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$.

- Dire que la suite (u_n) est majorée signifie qu'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n , $u_n \leq M$.
On dit que M est un majorant de la suite (u_n) .
- Dire que la suite (u_n) est minorée signifie qu'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n , $u_n \geq m$.
On dit que m est un minorant de la suite (u_n) .
- Dire que la suite (u_n) est bornée signifie que la suite (u_n) est majorée et minorée.

Exemple

(u_n) est la suite définie, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = 1 + \frac{2}{n}$. Pour $n \geq 1$:

$\frac{2}{n} \leq 2$ donc $u_n \leq 1 + 2 = 3$. Donc la suite est majorée par 3. De plus, $\frac{2}{n} \geq 0$ donc $u_n \geq 1 + 0 = 1$. Donc la suite est minorée par 1. Ainsi, la suite (u_n) est bornée.

Remarques

- Dans l'exemple précédent, 3 est un majorant de la suite, donc 3, 5 ; 4 ; $5\sqrt{2}$ sont aussi des majorants.
- Il existe des suites non majorées, non minorées comme par exemple la suite $(-2)^n$.

2 Comportement d'une suite géométrique (q^n)

Inégalité de Bernoulli

a désigne un nombre réel strictement positif. Pour tout entier naturel n , $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Propriété

q désigne un nombre réel.

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Démonstration

Les cas $q \leq -1$ (suite sans limite) et $q = 1$ (suite constante) sont "évidents".

Si $q > 1$, on pose $q = 1 + a$ avec $a > 0$. On a alors $q^n = (1 + a)^n$. D'après l'inégalité de Bernoulli on a alors $q^n \geq 1 + na$. Or, $a > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + na = +\infty$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Si $0 < q < 1$, on pose $a = \frac{1}{q}$. On a alors $a > 1$. Donc d'après le résultat précédent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$. Or pour tout entier

naturel n , $q^n = \frac{1}{a^n}$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Si $-1 < q < 0$, on pose $a = -q$. On a alors $0 < a < 1$. Donc d'après le résultat précédent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$. Or, pour tout entier naturel n : $q^n = (-a)^n$. Donc $-a^n < q^n < a^n$. D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

3 Suites monotones et convergences

Propriétés

- Si une suite est croissante et non majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.
- Si une suite est décroissante et non minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.

Démonstration

(u_n) est une suite croissante non majorée. Dire que (u_n) est non majorée signifie, par négation, que quel que soit le réel A , il existe un entier naturel N tel que $u_N > A$.

La suite étant croissante, il en résulte que pour tout entier naturel $n \geq N$, $u_n > A$.

Quel que soit le réel A , l'intervalle $]A; +\infty[$ contient donc tous les termes de la suite (u_n) pour $n \geq N$. Donc la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

Théorème de convergence (admis)

- Si une suite est croissante et majorée, alors cette suite converge.
- Si une suite est décroissante et minorée, alors cette suite converge.

Propriétés

- Si une suite (u_n) est majorée par M et converge vers un nombre réel l , alors $l \leq M$.
- Si une suite (u_n) est minorée par m et converge vers un nombre réel l , alors $l \geq m$.

Propriété

Si une suite est croissante (resp. décroissante) et converge vers un nombre réel l , alors la suite est majorée (resp. minorée) par l .