CHAPITRE 3 : Fonction polynôme du second degré, variations

1 Variations et courbe représentative

1.1 Sens de variations

Propriété
Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
f s'écrit sous forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, où α et β sont des réels tels que $f(\alpha) = \beta$.
Le sens de variations de la fonction f dépend du signe du coefficient a.

Si $a > 0$, la fonction f est d'abord décroissante puis croissante.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

β est le minimum de f sur $\mathbb{R}$. Il est atteint en $x = \alpha$.

Si $a < 0$, la fonction f est d'abord croissante puis décroissante.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

β est le maximum de f sur $\mathbb{R}$. Il est atteint en $x = \alpha$.

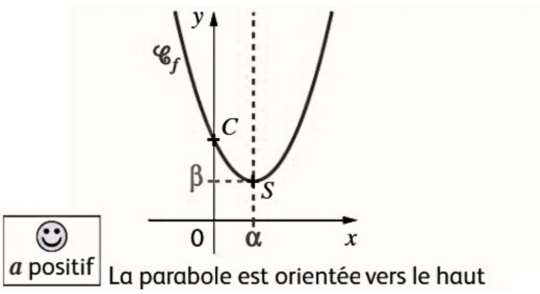
Exemple
On reprend la fonction f du Chapitre 1, définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ et de forme canonique $f(x) = 2(x + \frac{3}{4})^2 - \frac{25}{8}$.
$a = 2 > 0$ donc f est décroissante puis croissante. Elle admet un minimum $\beta = -\frac{25}{8}$ en $x = \alpha = -\frac{3}{4}$. D'où :

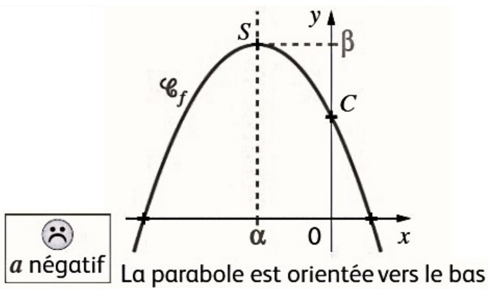
x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{25}{8}$	$\nearrow$	

1.2 Courbe représentative

Définition
Dans un repère orthogonal du plan, la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Propriété
Soit f la fonction polynôme du second degré écrite sous forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ et $\mathcal{P}$ la parabole représentant la fonction f.
- Le point $S(\alpha; \beta)$ est le sommet de la parabole $\mathcal{P}$.
- La droite d'équation $x = \alpha$ est l'axe de symétrie de la parabole $\mathcal{P}$.





Remarques
Si deux nombres réels x_1 et x_2 ont la même image par la fonction f, alors par symétrie, on a : $\alpha = \frac{x_1+x_2}{2}$ et $\beta = f(\alpha)$.

Exemple
Toujours avec la même fonction f, on déduit son sommet de coordonnées $S(\alpha; \beta) = S(-\frac{3}{4}; -\frac{25}{8})$.
La droite d'équation $x = \alpha = -\frac{3}{4}$ est l'axe de symétrie de cette parabole.

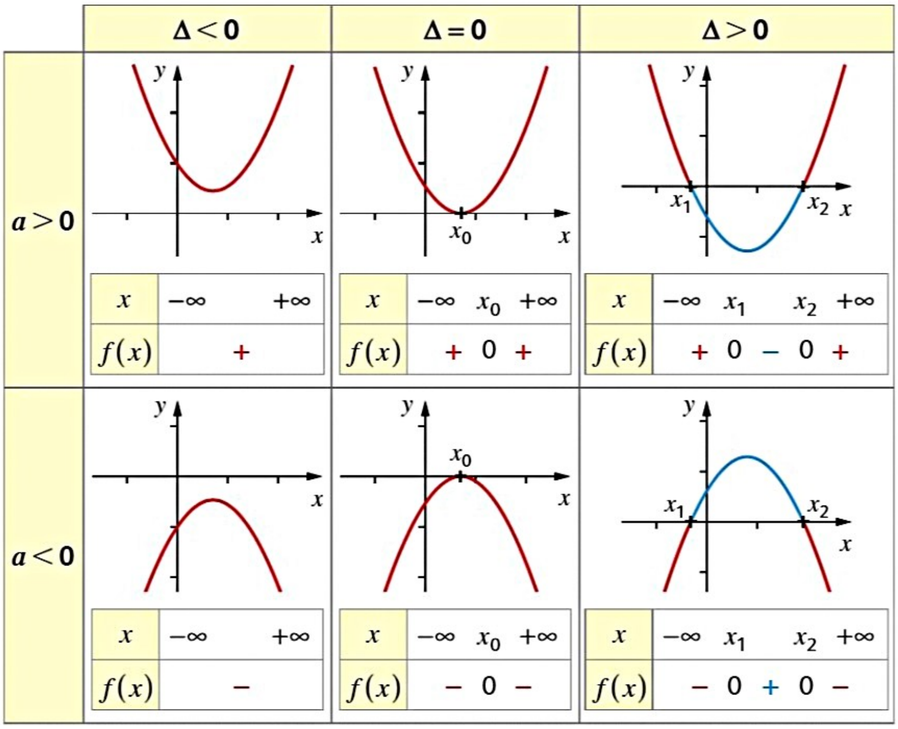
1.3 Position relative par rapport aux axes du repère

Propriété
La parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) :
- Coupe l'axe des ordonnées au point $C(0; c)$.
- Peut, selon les cas, couper l'axe des abscisses en deux points, un seul point ou aucun point.

2 Signe d'un polynôme du second degré

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
On appelle $\mathcal{P}$ la parabole représentant la fonction f et Δ le discriminant de f.
Étudier le signe de f, c'est déterminer les valeurs de x pour lesquelles l'image $f(x)$ est positive ou négative. Cela revient, graphiquement, à étudier la position de la parabole $\mathcal{P}$ par rapport à l'axe des abscisses.

On obtient les six cas de figures suivants :



Propriété
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de f. Pour tout réel x :

— si $\Delta < 0$ alors $f(x)$ est du signe de a.

— si $\Delta = 0$ alors $f(x)$ est du signe de a et s'annule en $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

— si $\Delta > 0$ alors $f(x)$ s'annule en x_1 et x_2 (avec $x_1 < x_2$) et son signe est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de $(-a)$	0	Signe de a	

Démonstration
On utilise les résultats démontrés du chapitre 1.
- Si $\Delta < 0$: $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ et $-\frac{\Delta}{4xa^2} > 0$ donc $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.
- Si $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_0\right)^2$ où x_0 est l'unique racine de f. Comme $\left(x - x_0\right)^2 \geqslant 0$ alors $ax^2 + bx + c$ est du signe de a et s'annule pour $x = x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$, c'est un produit de trois facteurs, dont on déduit le signe par un tableau de signes.

Exemple
Pour la fonction f du Chapitre 1, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$, on obtenait $\Delta = 25 > 0$ avec $x_1 = -2$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.
De plus, $a = 2 > 0$.
On peut ainsi construire son tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	