

1 Taux de variation et nombre dérivé

1.1 Taux de variation d'une fonction entre deux réels

Définition

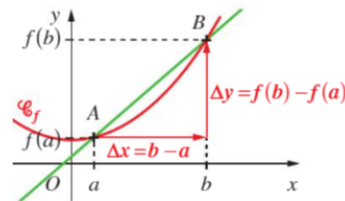
On considère une fonction f définie sur un intervalle I . Soient a et b deux nombres réels distincts appartenant à I . Le taux de variation (ou taux d'accroissement) de f entre a et b est le nombre réel égal à : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Interprétation géométrique

On considère, dans un repère du plan, les points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ de la courbe représentative de f .

Le taux de variation de f entre a et b est le coefficient directeur de la droite (AB) .

En effet, on a : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.



Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Le taux de variation de f entre $a = 1$ et $b = 3$ est égal à : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{9-1}{3-1} = 4$.

Interprétation cinématique

Étant donné un mobile M se déplaçant sur un axe $(O; \vec{i})$, on repère la position de ce mobile à l'instant t par la distance $d(t)$ entre ce point et l'origine O de l'axe. Le taux de variation de la fonction d entre les instants t_0 et t_1 (pour $t_0 \neq t_1$) est égal à la vitesse moyenne du mobile entre les instants t_0 et t_1 : $v_m = \frac{d(t_1)-d(t_0)}{t_1-t_0} = \frac{\text{distance parcourue entre les instants } t_0 \text{ et } t_1}{\text{durée écoulée entre ces deux instants}}$.

1.2 Notion de nombre dérivé

Définition

On considère une fonction f définie sur un intervalle I . Soient a un nombre réel de l'intervalle I et h un réel non nul tel que $a + h \in I$. On dit que la fonction f est dérivable en a lorsque le taux de variation de f entre les réels a et $a + h$ se rapproche d'un nombre réel L quand h se rapproche de 0.

Le réel L , limite du taux de variation lorsque h tend vers 0, est appelé nombre dérivé de la fonction f en a .

On le note $f'(a)$. On écrit : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. (se lit : limite, lorsque h tend vers 0, de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$).

Exemple

Le taux de variation de f , la fonction carrée, entre $a = 4$ et $b = 4 + h$ est égal à : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(4+h)^2 - 4^2}{4+h-4} = \frac{h^2 + 8h}{h} = 8 + h$.

Lorsque h tend vers 0, le taux de variation $8 + h$ tend vers 8. Ainsi : $f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 8 + h = 8$.

La fonction carré est donc dérivable en 4 et le nombre dérivé de f en 4 est 8.

Interprétation cinématique

On reprend le contexte précédent. Le taux de variation de la fonction d entre les instants t_0 et $t_1 = t_0 + h$ (pour $h \neq 0$) est égal à la vitesse moyenne du mobile entre les instants t_0 et t_1 : $v_m(h) = \frac{d(t_0+h) - d(t_0)}{h}$.

Si ce taux de variation admet, lorsque h tend vers 0, une limite réelle, alors la fonction d est dérivable en t_0 et le nombre dérivé $d'(t_0)$ de la fonction d en t_0 est la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0 .

2 Tangente à une courbe en un point

Dans cette partie, on munit le plan d'un repère (O, I, J) .

2.1 Notion de tangente

On considère une fonction f définie sur un intervalle I , a un réel de cet intervalle et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f .

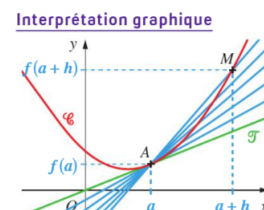
Définition

On suppose que f est dérivable en a . On note A le point de $\mathcal{C}$ de coordonnées $(a; f(a))$ et M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $a + h$, h étant un réel non nul tel que $a + h \in I$.

La droite (AM) est une sécante à la courbe $\mathcal{C}$. Son coefficient directeur est égal à :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Lorsque M décrit la courbe $\mathcal{C}$ (avec $M \neq A$), on obtient un faisceau de sécantes passant par A à la courbe $\mathcal{C}$.

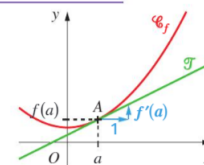


Remarque

Puisque f est dérivable en a , on a $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = f'(a)$.

La droite $\mathcal{T}$, passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$, se conçoit comme "la position limite" des sécantes (AM) lorsque M se rapproche de A .

Interprétation géométrique du nombre dérivé



Définition

Si f est dérivable en a , la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(a; f(a))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

2.2 Équation réduite de la tangente

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en un réel a de cet intervalle. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $A(a; f(a))$ est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Démonstration

La tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a admet une équation de la forme $y = mx + p$ où m et p sont deux constantes à déterminer. Par définition, $m = f'(a)$. Ainsi, l'équation réduite de $\mathcal{T}$ est $y = f'(a)x + p$.

De plus, la tangente $\mathcal{T}$ passe par le point $A(a; f(a))$ donc ses coordonnées vérifient l'équation précédente soit :

$$f(a) = f'(a) \times a + p.$$

On en déduit que $p = f(a) - f'(a) \times a$. L'équation réduite de la tangente s'écrit alors : $y = f'(a)x + f(a) - f'(a) \times a$.

C'est-à-dire $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exemple

On a montré que la fonction carrée est dérivable en $a = 4$ et que $f'(4) = 8$. Sa courbe représentative admet donc une tangente au point d'abscisse $a = 4$, d'équation : $y = f'(4)(x - 4) + f(4) = 8(x - 4) + 16 = 8x - 32 + 16 = 8x - 16$.

Remarque

Lorsque le nombre dérivé d'une fonction f est nul en un réel a , alors la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est parallèle à l'axe des abscisses (on dit alors que la tangente est horizontale).

L'équation réduite de la tangente est alors $y = f(a)$.

3 Fonctions usuelles et nombre dérivé

3.1 Nombre dérivé des fonctions usuelles

Propriété

Fonction	La fonction f définie par...	...est dérivable pour tout réel a appartenant à ...	...de nombre dérivé $f'(a)$ égal à ...
Constante	$f(x) = k$ (k constante réelle)	$\mathbb{R}$	$f'(a) = 0$
Identité	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(a) = 1$
Affine	$f(x) = mx + p$ (m, p constantes réelles)	$\mathbb{R}$	$f'(a) = m$
Carré	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(a) = 2a$
Cube	$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(a) = 3a^2$
Inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$	$] -\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$f'(a) = -\frac{1}{a^2}$
Racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

3.2 Des cas de non-dérivabilité

Propriété

La fonction racine carrée, bien que définie en 0, n'est pas dérivable en 0.

La fonction valeur absolue définie par $x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable en tout réel sauf en 0.

Démonstration

(de la non dérivabilité de la fonction racine carrée en 0)

On désigne par f la fonction racine carrée. Soit h un réel tel que $h > 0$. Le taux de variation de f entre 0 et $0 + h$ est égal à : $\tau(h) = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h} - 0}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$.

Or, lorsque h s'approche de 0, le réel $\frac{1}{\sqrt{h}}$ prend des valeurs arbitrairement grandes : on dit que $\tau(h)$ "tend vers $+\infty$ ".

Ce taux de variation n'admet pas de limite finie lorsque h tend vers 0. Ainsi, f n'est pas dérivable en 0.