$\boxed{\text{CHAPITRE 4 : Limites des fonctions}}$

1 Limite finie ou infinie en l'infini

1.1 Limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$

Définition
Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle $]A;+\infty[$ (avec A un nombre réel) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Fonctions de références
Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$), $x \mapsto \sqrt{x}$ ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Définition
Dire qu'une fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle $]-\infty;A[$ (avec A un nombre réel) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

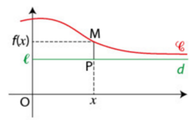
Fonctions de références
Les fonctions $x \mapsto -x$, $x \mapsto -x^2$, $x \mapsto -x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$), $x \mapsto -\sqrt{x}$ ont pour limite $-\infty$ en $+\infty$.

1.2 Limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$

Définition
Dire qu'une fonction f a pour limite le nombre réel l en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

Fonctions de références
Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ (avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$), $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ ont pour limite 0 en $+\infty$.

Interprétation graphique
Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, on dit que, dans un repère orthonormé, la droite d d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f.



Remarque
On définit de façon analogue une limite réelle en $-\infty$ ainsi qu'une asymptote horizontale en $-\infty$ lorsque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.

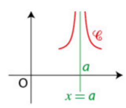
2 Limite finie ou infinie en un réel

f est une fonction définie sur D (intervalle ou réunion d'intervalles). On étudie la limite de f en un nombre réel a que si $a \in D$ ou si $a \notin D$ lorsque a est une borne d'un intervalle de D.

2.1 Limite infinie en un nombre réel a

Définition
Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a signifie que tout intervalle $]A;+\infty[$ (avec A un nombre réel) contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a. On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Interprétation graphique
Lorsqu'une fonction f a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en un nombre réel a (éventuellement à droite ou à gauche), on dit que, dans un repère orthonormé, la droite d d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f.



Remarque
On définit de façon analogue une limite $-\infty$ en a ainsi qu'une asymptote verticale lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

2.2 Limite finie en un nombre réel a

Définition
Dire qu'une fonction f a pour limite un réel l en a signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez proche de a. On note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

Remarque
Si $a \in D$ et si f a pour limite l en a, alors $l = f(a)$.

3 Limites et comparaison

3.1 Théorèmes de comparaison : limite infinie

Propriété
Si f et g sont deux fonctions telles que :
pour x assez grand $f(x) \geqslant g(x)$ **ET** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Propriété
Si f et g sont deux fonctions telles que :
pour x assez grand $f(x) \leqslant g(x)$ **ET** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$
Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

3.2 Théorèmes des gendarmes : limite réelle

Théorème (admis)
Si f, g, h sont des fonctions et l un nombre réel tels que :
pour x assez grand $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ **ET** $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = l$ (avec l un nombre réel)
Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

4 Opérations et limites

f et g sont deux fonctions définies sur le même ensemble de définition. a désigne un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et l, l' désignent des nombres réels.

4.1 Somme et produit de deux fonctions : règles admises

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dots$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \dots$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dots$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \times g(x)) = \dots$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Dans les cas "FI" (forme indéterminée), on ne peut pas conclure immédiatement et tout résultat est possible. Dans un tel cas, il faut lever l'indétermination en changeant l'écriture.

Exemples (cas des "FI")
On a $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x$. Chacune des deux fonctions f et g a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
$f(x) - g(x) = \dfrac{1}{x}$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$.

4.2 Quotient de deux fonctions : règles admises

• Cas où $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dots$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \dots$	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dots$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

• Cas où $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dots$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \dots$	0 en restant positif	0 en restant positif	0 en restant négatif	0 en restant négatif	0
alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dots$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemples (cas des "FI")
$f(x) = x^2$ et $g(x) = x$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. Mais $\dfrac{f(x)}{g(x)} = x$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

5 Fonction exponentielle et limites

5.1 Limites de la fonction exponentielle

Lemme
Pour tout réel x, $e^x \geqslant x+1$.

Propriétés

— La fonction exponentielle a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

— La fonction exponentielle a pour limite 0 en $-\infty$. Ainsi : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

5.2 Croissance comparée de $x \mapsto x^n$ et exp en $+\infty$

Propriété
On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Propriété
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Démonstration
D'après le lemme précédent, $e^p = p+1$. On pose $p = \dfrac{x}{n+1}$. On a donc : $e^{\frac{x}{n+1}} \geqslant \dfrac{x}{n+1} + 1$. Ainsi : $e^{\frac{x}{n+1}} \geqslant \dfrac{x}{n+1}$.
Or, la fonction exponentielle est croissante sur $]0;+\infty[$. Donc, pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $\left(e^{\frac{x}{n+1}}\right)^{n+1} \geqslant \left(\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1}$.
En simplifiant les puissances, on obtient : $e^x \geqslant \left(\dfrac{x}{n+1}\right)^{n+1} = k \times x^{n+1} = k \times x \times x^n$ avec $k > 0$.
On en déduit donc que, pour tout $x > 0$: $\dfrac{e^x}{x^n} \geqslant kx$.
Or, $\lim\limits_{x \to +\infty} kx = +\infty$ (car $k > 0$) donc d'après le théorème de comparaison : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$.

Conséquence (admise)
Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$.

Remarque
On dit que "en $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur les puissances de x".