CHAPITRE 5 : Continuité des fonctions d'une variable réelle

1 Langage de la continuité

Définitions

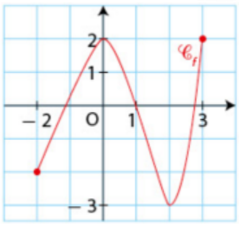
f est une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre réel de I.

— Dire que f est continue en a signifie que f a une limite en a égale à $f(a)$, soit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

— Dire que f est continue sur l'intervalle I signifie que f est continue en tout réel a de I.

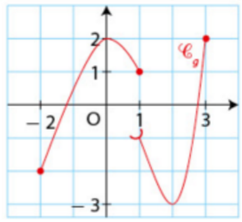
Exemples

• La fonction f représentée ci-dessous est continue sur l'intervalle $[-2 ; 3]$.



• La fonction g représentée ci-dessous n'est pas continue sur l'intervalle $[-2 ; 3]$. En effet, g est discontinue en 1 car g n'a pas de limite en 1 :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} g(x) = 1 \qquad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} g(x) = -1$$



Propriétés (admises)

f est une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre réel de I.

— Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

— Si f est dérivable sur I, alors f est continue sur I.

Propriétés (admises)

— Les fonctions polynômes et la fonction exponentielle sont continues sur $\mathbb{R}$.

— La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$.

— Toute fonction définie sur un intervalle I et obtenue par opérations ou composition à partir des fonctions précédentes est continue sur I.

2 Fonctions continues et suites convergentes

2.1 Image d'une suite par une fonction

Définition

(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$. f est une fonction définie sur un intervalle I contenant tous les termes u_n. L'image de la suite (u_n) par la fonction f est la suite $(f(u_n))$.

Exemple

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n+1$ et f est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Pour n, $2n+1 \in [1 ; +\infty[\subset [0 ; +\infty[$. Ainsi, l'image de la suite (u_n) par la fonction f est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $f(u_n) = \sqrt{2n+1}$.

Propriété (admise)

(u_n) est une suite qui converge vers un nombre réel l. I est un intervalle tel que $l \in I$ et pour tout entier naturel n, $u_n \in I$.

Pour toute fonction f définie sur l'intervalle I et continue en l, la suite $(f(u_n))$ converge vers le nombre réel $f(l)$.

Exemple

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{1}{n}\right)$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n}$ et on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right)$. Pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n} \in]0 ; +\infty[\subset \mathbb{R}$, donc $v_n = f(u_n)$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, la suite (u_n) converge vers $\ell = \mathbf{0}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en $\mathbf{0}$.

Ainsi, la suite (v_n) converge vers $f(\mathbf{0})$: $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

2.2 Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction définie et continue sur un intervalle I.

Lorsque la suite (u_n) converge vers un nombre réel l de I, alors la suite $(f(u_n))$ converge vers le nombre réel $f(l)$. Donc l'unicité de la suite permet d'affirmer que $l = f(l)$.

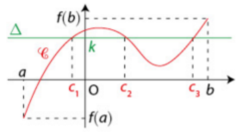
Ainsi, si le suite (u_n) converge vers un réel l de I et si f est continue sur I, donc en particulier en l, alors $l = f(l)$. Autrement dit, l est une solution dans I de l'équation $f(x) = x$.

3 Théorème des valeurs intermédiaires

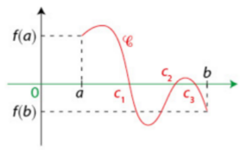
3.1 Propriété fondamentale des fonctions continues

Théorème des valeurs intermédiaires (admis)
f est une fonction continue sur un intervalle I. a et b désignent deux nombres réels de I avec $a < b$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Interprétation graphique
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, la droite d'équation $y = k$ coupe au moins une fois la courbe $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse comprise entre a et b.



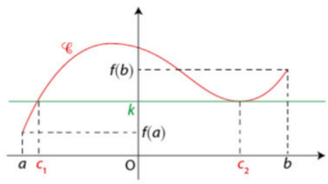
Conséquence : théorème de Bolzano
f est une fonction continue sur un intervalle I. a et b désignent deux nombres réels de I avec $a < b$.
Si 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, c'est à dire si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.



3.2 Application aux équations

f est une fonction continue sur un intervalle I. a et b désignent deux nombres réels de I avec $a < b$.

Le théorème des valeurs intermédiaires permet alors d'affirmer que pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c comprise entre a et b.

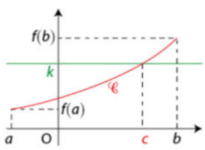


Ce théorème permet de déterminer l'existence d'au moins une solution d'une équation $f(x) = k$ mais il ne permet pas de connaître ni le nombre exact ni les valeurs exactes (valeurs approchées avec des méthodes algorithmiques) de ces solutions.

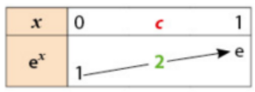
4 Fonctions continues et strictement monotone

Propriété

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a; b]$.



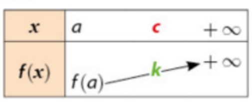
Exemple
L'équation $e^x = 2$ a une unique solution dans l'intervalle $I = [0; 1]$.
En effet, la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur l'intervalle I ; et 2 est compris entre $e^0 = 1$ et $e^1 \simeq 2,718$.



Conséquence
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a; b]$.

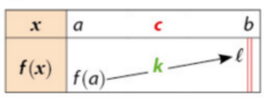
Remarque
La propriété précédente admet diverses extensions dans le cas où la fonction est continue et strictement monotone sur un intervalle I ouvert ou semi-ouvert, borné ou non. Voici trois exemples :

• $I = [a ; +\infty[$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



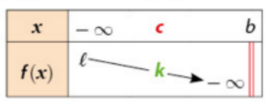
Pour tout réel k tel que $k \geqslant f(a)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution c dans l'intervalle $[a ; +\infty[$.

• $I = [a ; b[$
$\lim\limits_{x \to b} f(x) = \ell$



Pour tout réel k dans $[f(a) ; \ell[$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution c dans l'intervalle $[a ; b[$.

• $I =]-\infty ; b[$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = -\infty$



Pour tout réel k tel que $k < \ell$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution c dans l'intervalle $]-\infty ; b[$.