1 Rappels sur la dérivation

1.1 Nombre dérivé, fonction dérivée

Définitions

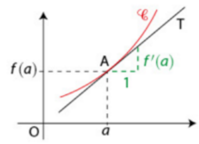
— a et $a+h$ désignent deux nombres réels d'un intervalle I avec $h \neq 0$. Dire que f est dérivable en a signifie que la fonction $h \longmapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet un nombre réel pour limite en 0.
Ce nombre réel est appelé nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$. Ainsi : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

— Dire que f est dérivable en a sur I signifie que f est dérivable en tout réel x de I.
La fonction dérivée de f, notée f', est la fonction qui, à tout x de I, associe le nombre $f'(x)$.

1.2 Tangente à la courbe d'une fonction

Propriété

f est une fonction dérivable en un réel a de I. Dans un repère, la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f au point A d'abscisse a est la droite T qui passe par le point A et de coefficient directeur $f'(a)$. Une équation de T est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.



1.3 Signe de la dérivée et sens de variation

Propriétés

f est une fonction dérivable sur I.

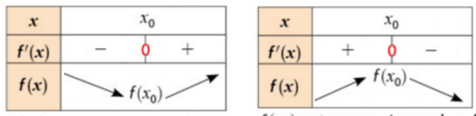
— Si, pour tout réel x de I, $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

— Si, pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.

1.4 Dérivée et extremum local

Propriété

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et x_0 est un nombre réel de I. Si $f(x_0)$ est un extremum local de f alors $f'(x_0) = 0$.
Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local.



$f(x_0)$ est un minimum local. $f(x_0)$ est un maximum local.

2 Règles de dérivation

2.1 Opérations et dérivation

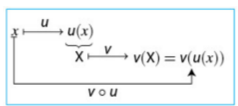
u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k désigne un nombre réel.

•$(u+v)' = u'+v'$ •$(ku)' = ku'$ •$(uv)' = u'v+uv'$ •$(u^2)' = 2uu'$ •$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$ •$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

2.2 Composée de deux fonctions

Définition

u est une fonction définie sur un intervalle I et v est une fonction définie sur un intervalle J tel que pour tout x de I, on ait $v(x)$ dans J. La fonction composée de u suivie de v, notée $u \circ v$ (lire "v rond u"), est la fonction définie sur I par $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.



Propriété (admise)

u est une fonction définie sur un intervalle I et v est une fonction définie sur un intervalle J tel que pour tout x de I, on ait $v(x)$ dans J. Si u est dérivable sur I et v est dérivable sur J alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I : $(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$.

Exemple

u et v sont les fonctions définies sur $I = \mathbb{R}$ par $u(x) = 2x-1$ et $v(x) = x^2$.
La fonction $v \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(2x-1) = (2x-1)^2$.
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc $v \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a : $(v \circ u)'(x) = v'(2x-1) \times 2 = 2(2x-1) \times 2 = 4(2x-1)$.

Conséquences

u est une fonction dérivable sur un intervalle I et n désigne un nombre entier relatif non nul.

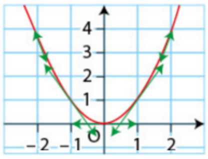
•$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ •$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ •$(e^u)' = u'e^u$

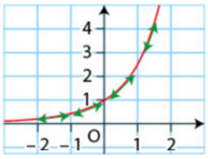
3 Fonctions convexes

3.1 Convexité et lecture graphique

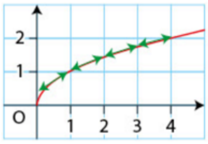
Définition
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère.
f est convexe sur I si $\mathcal{C}$ est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
f est concave sur I si $\mathcal{C}$ est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.

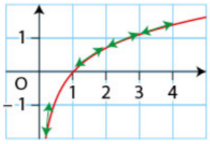
Exemples
Les fonctions x^2 et e^x sont convexes sur $\mathbb{R}$.





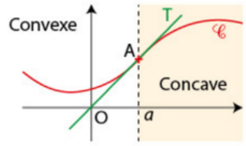
Les fonctions $\sqrt{x}$ et $ln(x)$ sont concaves sur l'intervalle $]\ 0\ ;\ +\infty\ [$.





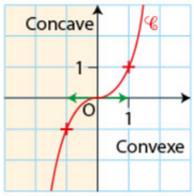
3.2 Point d'inflexion d'une courbe

Définition
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère.
Le point A de $\mathcal{C}$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$ si au point A, la courbe $\mathcal{C}$ traverse sa tangente en A.



Remarque
La courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f dérivable admet un point d'inflexion en A d'abscisse a quand la fonction f passe de concave à convexe **ou** de convexe à concave, en a.

Exemple
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. L'origine O du repère est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f. f est donc concave sur $]-\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$.



4 Convexité et dérivées

4.1 Convexité et sens de variation de f'

Propriété (admise)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

Exemples
La fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) = 3x^2$.
Sur $]\ -\infty\ ;\ 0\ ]$ g' est décroissante donc g est concave. Sur $[\ 0\ ;\ +\infty\ [$ g' est croissante donc g est convexe.

4.2 Convexité et signe de f''

Définition
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Dire que f est deux fois dérivable sur I signifie que f' est elle-même dérivable sur I. La fonction dérivée de f', notée f'', est appelée dérivée seconde de f.

Propriétés
f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
f est convexe sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, $f''(x) \geqslant 0$.
f est concave sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, $f''(x) \leqslant 0$.

Conséquence (démontrée)
Si f'' est positive, alors la courbe $\mathcal{C}$ est au dessus de ses tangentes.
Démonstration : si $f'' \geqslant 0$, alors f' est croissante donc f est convexe sur I et donc la courbe $\mathcal{C}$ est au dessus de ses tangentes.

Propriété (admise)
f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. $\mathcal{C}$ est sa courbe représentative dans un repère et $a \in I$.
Le point $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$, si et seulement si, f'' s'annule en a en changeant de signe.

Exemple
Pour tout réel x : $f(x) = x^3$; $f'(x) = 2x^2$; $f''(x) = 6x$. Avec le tableau de signe ci-dessous, on retrouve le fait que l'origine O du repère est un point d'inflexion de la courbe représentative de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	