CHAPITRE 7 : Vecteurs, droites et plans de l'espace

1 Vecteurs de l'espace

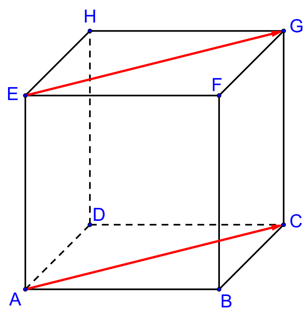
1.1 Translations et vecteurs

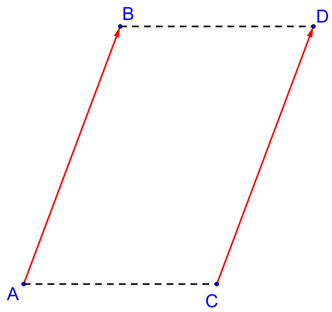
Définition

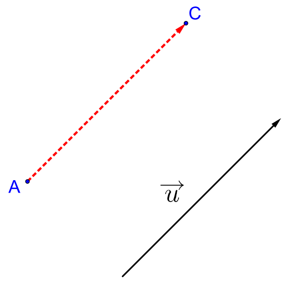
On étend à l'espace la notion de vecteur vue en géométrie plane. À tout couple de points $(A\ ;\ B)$ de l'espace on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de la façon suivante :

- Si $A \neq B$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour direction la droite (AB), pour sens celui de A vers B et pour longueur la distance AB notée $\|\overrightarrow{AB}\|$.
- Si $A = B$, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul. On note $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

Propriétés



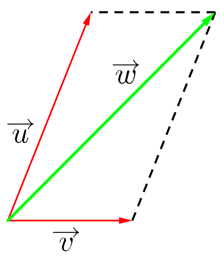


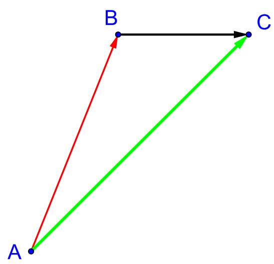


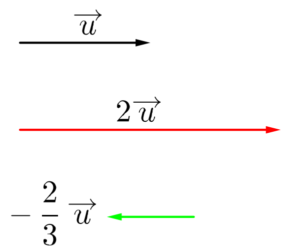
- Deux vecteurs non nuls sont égaux si et seulement si ils ont la même direction, le même sens et la même longueur.
- Pour quatre points non alignés de l'espace A, B, C et D, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.
- Quel que soit le point A de l'espace et quel que soit le vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point C tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{u}$.

1.2 Opérations sur les vecteurs

Les opérations sur les vecteurs du plan s'étendent aux vecteurs de l'espace :







- Addition de deux vecteurs par la règle du parallélogramme : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$.
- Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- Produit d'un vecteur par un réel : vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{u}$ vecteur de l'espace.

Propriétés (admises)

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ désignent des vecteurs de l'espace et λ et λ' désignent des nombres réels.

- $\lambda\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si, et seulement si, $\lambda = 0$ ou $\overrightarrow{u} = 0$.
- $(-1)\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u}$ et le vecteur $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$ est noté $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.
- $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v} \qquad (\lambda + \lambda')\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda'\overrightarrow{u} \qquad \lambda(\lambda'\overrightarrow{u}) = (\lambda\lambda')\overrightarrow{u}$.

Définition

Dire qu'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{t}$ signifie qu'il existe des réels x, y et z tels que : $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{v} + y\overrightarrow{w} + z\overrightarrow{t}$.

2 Droites de l'espace

2.1 Vecteurs directeurs d'une droite, vecteurs colinéaires

<u>Définition</u>
Dire qu'un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur d'une droite d signifie qu'il existe deux points distincts A et B de la droite d tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

<u>Définitions</u>

- Dire que deux vecteurs non nuls de l'espace $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires signifie qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.
- Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs de l'espace (quel que soit le vecteur $\overrightarrow{u}$, on a : $\overrightarrow{0} = 0 \times \overrightarrow{u}$).

<u>Propriétés</u>

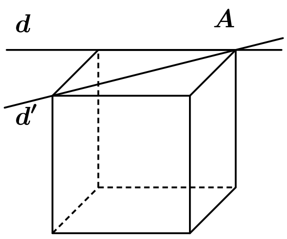
- d est la droite passant par un point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Un point M appartient à la droite d si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires, c'est à dire s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u}$.
- Trois points de l'espace A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- Deux droites de l'espace (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2.2 Positions relatives de deux droites de l'espace

d et d' sont deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$.

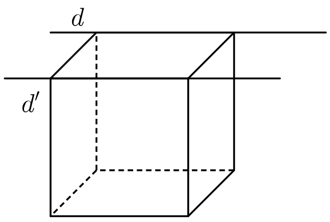
Coplanaires (dans un même plan)

d et d' sécantes

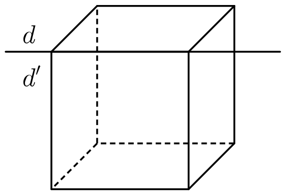


d et d' ont un point d'intersection A.

d et d' parallèles

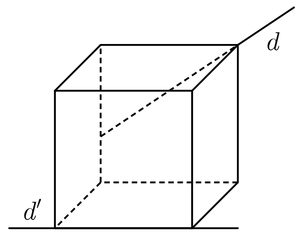


d et d' strictement parallèles.



d et d' confondues

Non coplanaires



Aucun plan ne contient d et d'

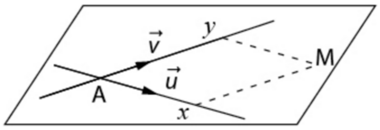
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont colinéaires dans les deux cas du parallélisme, mais ne le sont pas dans les deux autres cas.

3 Plans de l'espace

3.1 Caractérisation d'un plan de l'espace

Notation et vocabulaire

Un plan de l'espace peut être défini par la donnée de deux droites sécantes, c'est à dire d'un point A et de deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On note ce plan $(A;\vec{u};\vec{v})$, on dit que $(\vec{u};\vec{v})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan et qu'il définit sa direction.



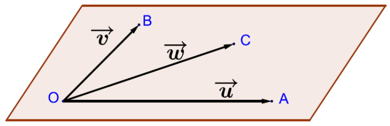
Propriété (admise)

$\mathcal{P}$ est le plan $(A;\vec{u};\vec{v})$.
Un point M de l'espace appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

3.2 Vecteurs coplanaires

Définition

Dire que les vecteurs de l'espace $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires signifie que pour un point O quelconque de l'espace, le point O et les points A, B, C définis par $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$ sont dans un même plan. Autrement dit, trois vecteurs sont coplanaires lorsqu'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.



Propriété

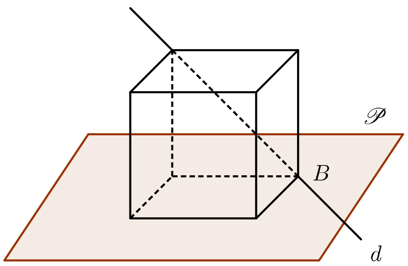
Considérons trois vecteurs de l'espace $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

- Si il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, alors $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires.
- Réciproquement, si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires et si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors on peut écrire $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, avec a, b réels.

3.3 Positions relatives de droites et plans de l'espace

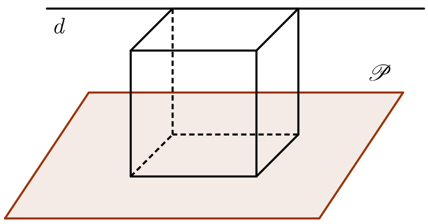
$\mathcal{P}$ est un plan de direction $(\vec{u}, \vec{v})$ et d est une droite de vecteur directeur $\vec{w}$.
Ainsi, une droite et un plan de l'espace sont parallèles lorsque $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires et sont sécants lorsque les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.

Sécants

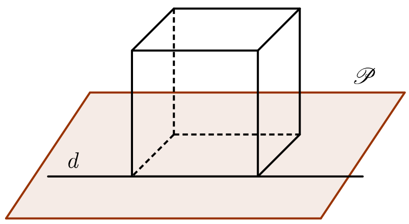


d et $\mathscr{P}$ ont un point d'intersection B

Parallèles



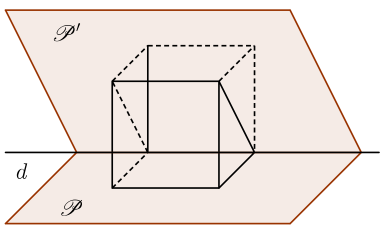
d et $\mathscr{P}$ sont strictement parallèles, leur intersection est vide.



d est contenue dans $\mathscr{P}$

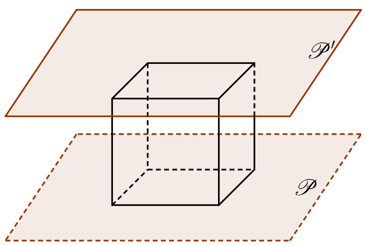
Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de l'espace.
Ainsi, deux plans de l'espace sont parallèles lorsqu'ils ont la même direction et ils sont sécants lorsqu'ils n'ont pas la même direction.

Sécants

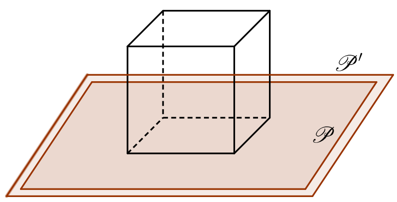


$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ont une droite d'intersection d.

Parallèles



$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont strictement parallèles, leur intersection est vide.



$\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus.

4 Bases et repères de l'espace

4.1 Bases de l'espace

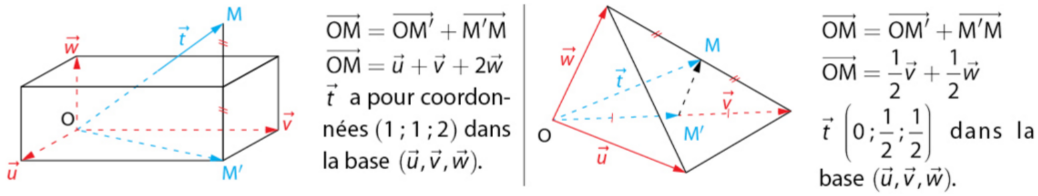
Définition

Une base de l'espace est un triplet $(\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w})$ formé de trois vecteurs non coplanaires.

Propriété

Considérons trois vecteurs de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ non coplanaires. Alors, pour tout vecteur $\vec{t}$ de l'espace, il existe un unique triplet de nombres réels $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ tel que : $\vec{t}=a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}$.

Exemples



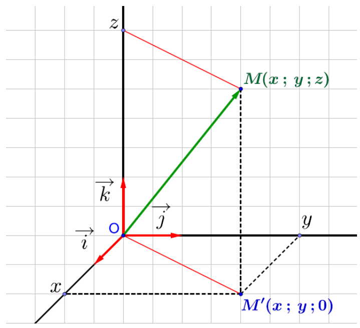
4.2 Repères de l'espace

Définition

Un repère de l'espace est la donnée d'un point (souvent noté) O (l'origine du repère) et de trois vecteurs non coplanaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$. On note ce repère $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$.

Propriété

Soit $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de nombres réels $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.
On dit que $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ sont les coordonnées du point M (ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$) dans le repère de l'espace $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$. Le nombre x est l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote du point M.



4.3 Calculs

Dans un repère de l'espace $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ quelconque :

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors pour tout réel k on a : $k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\\kz\end{pmatrix}$ et $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$

- Si $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B\ ;\ z_B)$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$ et si I est le milieu du segment $[AB]$, on a $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A+y_B}{2}\ ;\ \dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.

- Avec les mêmes notations, et si de plus $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ est **orthonormé** (axes perpendiculaires deux à deux et même unité sur les trois axes), on a :

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\text{ et }\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}.$$

5 Représentations paramétriques de droites

5.1 Définition

Soit $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ un repère de l'espace et d la droite passant par le point $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et dirigée par le vecteur non nul $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. Alors : $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in d \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\iff \exists t \in \mathbb{R}\ :\ \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

Ceci équivaut encore à : $\exists t \in \mathbb{R}\ :\ \begin{pmatrix}x - x_A\\y - y_A\\z - z_A\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \iff \exists t \in \mathbb{R}\ :\ \begin{cases}x - x_A = ta\\y - y_A = tb\\z - z_A = tc\end{cases} \iff \exists t \in \mathbb{R}\ :\ \begin{cases}x = x_A + ta\\y = y_A + tb\\z = z_A + tc\end{cases}$,

où le dernier système est appelé représentation paramétrique de la droite d. Ainsi, un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à d si et seulement si il existe un réel t tel que les coordonnées x, y, z de M vérifient le dernier système. On dit que le réel t est le paramètre de cette représentation.

Notes

L'écriture « $\exists t \in \mathbb{R}\ :$ » signifie « il existe un réel t tel que : ».

On aurait pu utiliser un paramètre s ou t' ou λ à la place de t.

5.2 Exemples d'utilisation

- d est la droite qui passe par le point $A(2; -3; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(3; 4; 2)$.

  Une représentation paramétrique de d est $\begin{cases}x = 2 + 3t\\y = -3 + 4t\\z = 1 + 2t\end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

- À partir d'une représentation paramétrique de droite comme $\begin{cases}x = 1 + 4t\\y = 2 + 5t\\z = 3 + 6t\end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ on peut « lire » un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$ en prenant les coefficients du paramètre t et en remplaçant t par une valeur, par exemple 0, on obtient les coordonnées d'un point de la droite : $(1\ ;\ 2\ ;\ 3)$.

- Considérons un plan $\mathcal{P} = (A\ ;\ \vec{u},\ \vec{v})$ avec $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$, où $\vec{u},\ \vec{v}$ ne sont pas colinéaires (sinon, ils ne définissent pas un plan). On peut aussi donner des représentations paramétriques de ce plan en écrivant $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM},\ \vec{u},\ \vec{v}$ sont coplanaires, donc :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in \mathcal{P} \iff \exists t, s \in \mathbb{R}\ :\ \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + s\vec{v} \iff \exists t, s \in \mathbb{R}\ :\ \begin{cases}x = x_A + ta + sd\\y = y_A + tb + se\\z = z_A + tc + sf\end{cases}.$$

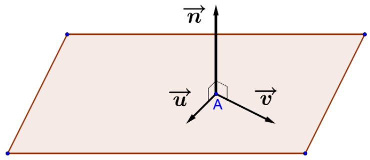
- Attention, toutes ces représentations paramétriques (droites et plans) ne sont pas uniques.

6 Équations cartésiennes d'un plan

6.1 Vecteur normal à un plan

Définition

Étant donné un plan $(A\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$ (défini par un point et deux vecteurs non colinéaires), un vecteur $\vec{n}$ est dit normal à ce plan lorsqu'il est non nul et lorsque pour tout point M du plan, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.
Autrement dit, le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan lorsque la droite $(A\ ;\ \vec{n})$ est orthogonale au plan.



Remarques

- Le vecteur $\vec{n}$, à lui tout seul, indique l'orientation du plan de l'espace, au même titre que le couple de vecteurs non colinéaires $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$. Ainsi, pour définir un plan il suffit d'un point et d'un vecteur normal.
- Tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal au plan $(A\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. En effet, pour tout point M du plan $(A\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$, et pour tout réel $\lambda \neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\lambda\vec{n}$ sont orthogonaux.
- Pour tous les points M et N du plan $(A\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$.

6.2 Équations cartésiennes d'un plan

Propriétés

L'espace étant muni d'un repère orthonormé,

1. Si $\vec{n}(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est un vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$, alors les coordonnées des points de $\mathcal{P}$ vérifient une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où $a,\ b,\ c$ sont des réels non tous nuls.
2. Réciproquement, si $a,\ b,\ c$ sont trois nombres réels non tous nuls (simultanément) et si d est un réel quelconque, alors l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a\ ;\ b\ ;\ c)$.

Démonstration

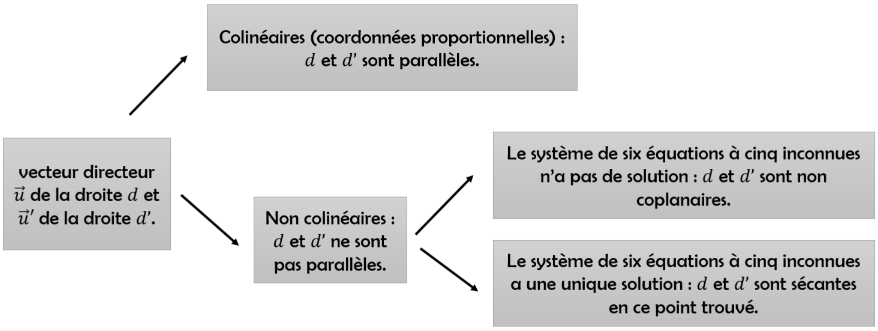
1. Choisissons un point $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A) \in \mathcal{P}$. Si un point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(a\ ;\ b\ ;\ c)$, alors on a $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ par définition du vecteur normal à un plan (qui est orthogonal à toutes les directions du plan). Or, on a $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$. D'où : $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$, soit encore : $ax + by + cz + (-ax_A - by_A - cz_A) = 0$.
   En posant $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$, on obtient la forme voulue, c'est-à-dire $ax + by + cz + d = 0$, où les réels $a,\ b,\ c$ sont non tous nuls puisqu'ils proviennent des coordonnées de $\vec{n}$, vecteur normal (au plan $\mathcal{P}$), qui par définition n'est pas le vecteur nul.
2. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des points $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de l'espace vérifiant $ax + by + cz + d = 0$ où $a,\ b,\ c$ sont des réels non tous nuls, et notons $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(a\ ;\ b\ ;\ c)$. Supposons par exemple que a est non nul (démonstration similaire si c'est b ou c qui est non nul). Le point $A\left(-\frac{d}{a}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)$ appartient à l'ensemble $\mathcal{E}$, et $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = a(x + \dfrac{d}{a}) + by + cz = ax + by + cz + d$. On en déduit donc que :

$$M \in \mathcal{E} \iff ax + by + cz + d = 0 \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

   $\mathcal{E}$ est donc constitué de l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, c'est donc le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

7 Traduire un problème par un système d'équations linéaires

7.1 Déterminer l'intersection de deux droites



Dans un repère orthonormé, on se propose d'étudier la position relative des droites d et d' d'équations paramétriques respectives (S) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 + t \\ z = -2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ et (S') $\begin{cases} x = 17 + 2t' \\ y = -2 - 2t' \\ z = -4 + t' \end{cases}$ $(t' \in \mathbb{R})$.

d admet $\overrightarrow{u}(1; 1; -2)$ et d' admet $\overrightarrow{u}'(2; -2; 1)$ comme vecteur directeur. Or $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ ne sont pas colinéaires donc les droites d et d' ne sont pas parallèles.

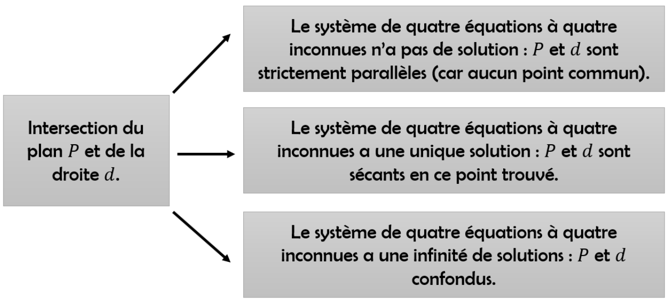
Il faut donc résoudre le système (T) : $\begin{cases} 5 + t = 17 + 2t' \\ 2 + t = -2 - 2t' \\ -2t = -4 + t' \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 12 + 2t' \\ t = -4 - 2t' \\ -2t = -4 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 12 + 2t' \\ 12 + 2t' = -4 - 2t' \\ -2t = -4 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 12 + 2t' \\ 4t' = -16 \\ -2t = -4 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 12 + 2t' \\ t' = -4 \\ -2t = -4 + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 12 - 8 \\ t' = -4 \\ -2t = -4 - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t' = -4 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

En remplaçant t par 4 dans le système (S) (ou t' par -4 dans le système (S')), on obtient M le point d'intersection de d et d' de coordonnées $M(9; 6; -8)$.

7.2 Étudier l'intersection d'une droite et d'un plan



Dans un repère orthonormé, le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $5x + y - z + 3 = 0$ et la droite d pour représentation paramétrique (S) $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t \\ z = 3 - t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Pour étudier l'intersection de $\mathcal{P}$ et de d, on résout le système (T), de quatre équations à quatre inconnues :

$$(T) : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t \\ z = 3 - t \\ 5x + y - z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t \\ z = 3 - t \\ 5t + 1 - 6t - 3 + t + 3 - t + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t \\ z = 3 - t \\ 0t = -1 \end{cases}.$$

Comme la quatrième équation n'a pas de solution, alors le système n'a pas de solution. Ainsi, d et $\mathcal{P}$ n'ont pas de point commun et sont donc strictement parallèles.