CHAPITRE 6 : Arithmétique

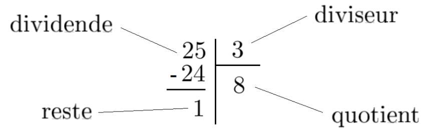
1 Déterminer les diviseurs d'un nombre entier

Définition

a et b désignent deux nombres entiers positifs ($b \neq 0$).
Effectuer la division euclidienne de a par b, c'est déterminer les deux entiers positifs q et r tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.
q s'appelle le quotient de la division euclidienne et r le reste.

Exemple

Division euclidienne de 25 par 3 :



$25 = 3 \times 8 + 1$ et on a bien $0 \leq 1 < 3$.

Définition

a et b désignent deux nombres entiers positifs ($b \neq 0$).
On dit que b est un diviseur de $a$si le reste de la division euclidienne de a par b est nul, c'est-à-dire s'il existe un entier q tel que $a = bq$.
On dit aussi que b divise a, que a est divisible par b ou que a est un multiple de b.

Exemple

$5 \times 3 = 15$
On dit que 15 est un multiple de 3 et de 5.
On dit aussi que 15 est divisible par 3 et 5.

Méthode

Pour trouver tous les diviseurs d'un nombre entier N, on teste la divisibilité de N par tous les nombres entiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{N}$.

Exemple

Pour trouver tous les diviseurs de 18, on calcule $\sqrt{18}$.
$\sqrt{18} \simeq 4,2$ donc on teste la divisibilité par 1, 2, 3 et 4.
$18 = 1 \times 18 = 2 \times 9 = 3 \times 6$. Les diviseurs de 18 sont 1, 2, 3, 6, 9 et 18.

Propriétés (Critère de divisibilité)

- Si un nombre entier a pour chiffre des unités $0, 2, 4, 6$ ou 8 alors il est divisible par 2.
- Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 3 alors ce nombre est divisible par 3.
- Si le nombre formé par les deux derniers chiffres d'un nombre entier est divisible par 4 alors ce nombre est divisible par 4.
- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0 ou 5 alors il est divisible par 5.
- Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 9 alors ce nombre est divisible par 9.
- Si un nombre a pour chiffre des unités 0 alors il est divisible par 10.

Exemple

175 est divisible par 5 car son chiffre des unités est 5.
189 est divisible par 3 car la somme de ses chiffres ($1 + 8 + 9 = 18$) est elle-même divisible par 3.

2 Reconnaître un nombre premier

Définition

Un nombre premier est un nombre entier positif qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple

6 n'est pas un nombre premier car il admet 2 et 3 comme diviseurs. 7 est un nombre premier car il n'est divisible que par 1 et par 7.

Remarques

- 0 n'est pas premier car il possède une infinité de diviseurs.
- 1 n'est pas premier car il possède un seul diviseur : lui-même.
- 2 est le seul nombre premier pair, car tous les nombres pairs sont divisibles par 2.

Propriété

Il existe une infinité de nombres premiers.

Méthode

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
Pour montrer que N est premier, il suffit de montrer que N n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{N}$.

Exemple

On veut savoir si 157 est un nombre premier.
$\sqrt{157} \simeq 12,5$. Il faut donc tester la divisibilité de 157 par 2, par 3, par 5, par 7 et par 11. 157 n'est pas divisible par aucun de ces 5 nombres, il est donc premier.

3 Décomposer un entier en produit de facteurs premiers

Propriété

Tout nombre entier peut s'écrire comme un produit de facteurs premiers.

Exemple

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ ou $60 = 2^2 \times 3 \times 5$.
$728 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times 13$ ou $728 = 2^3 \times 7 \times 13$.