CHAPITRE 8 : Loi binomiale

1 Succession d'épreuves indépendantes

Définition

Dans une succession d'épreuves, lorsque l'issue d'une épreuve ne dépend pas des épreuves précédentes, on dit que ces épreuves sont indépendantes.

Remarques

On considère n épreuves successives indépendantes d'univers $E_1, E_2, ..., E_n$. L'univers E de cette succession de n épreuves successives indépendantes est le produit cartésien : $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$.

Les issues de E sont les $n-uplets$ $(x_1; x_2; ...; x_n)$ où $x_i \in E_i$ pour tout entier naturel $1 \leqslant i \leqslant n$.

Propriété (admise)

Dans une succession de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(x_1; x_2; ...; x_n)$ est égale au produit des issues de ses composantes $x_1; x_2; ...; x_n$.

Exemple

On lance un dé tétraédrique équilibré dont les quatre sommets sont numérotés 1, 2, 3, 4. L'univers de cette expérience aléatoire est $E_1 = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

Puis, on tire au hasard un jeton d'un sac contenant un jeton A et deux jetons B. L'univers de cette expérience aléatoire est $E_2 = \{A ; B\}$.

Voici la loi de probabilité de chacune de ces épreuves :

Issue	1	2	3	4
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Issue	A	B
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

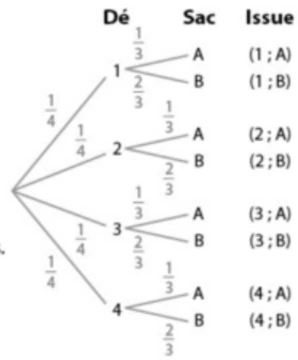
La succession de ces deux épreuves indépendantes a pour univers $E = E_1 \times E_2$. On représente ces issues à l'aide de l'arbre ci-contre.

Par exemple :

$$P(1 ; A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$P(3 ; A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$P(1 ; B) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$



D'où la loi de probabilité de la succession de ces deux épreuves indépendantes.

Issue	(1 ; A)	(1 ; B)	(2 ; A)	(2 ; B)	(3 ; A)	(3 ; B)	(4 ; A)	(4 ; B)
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

2 Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

Épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues. L'une est appelée succès et notée S, l'autre est appelée échec et notée $\overline{S}$.

Loi de Bernoulli

On considère une épreuve de Bernoulli où la probabilité du succès est p. X est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. La loi de probabilité de X, présentée sous le tableau ci-dessous, est appelée loi de Bernoulli de paramètre p.

a	0	1
$P(X = a)$	$1 - p$	p

Schéma de Bernoulli

Un schéma de Bernoulli est une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

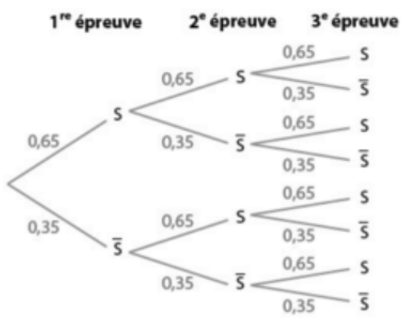
Exemple

Alex essaie trois fois de suite d'atteindre une cible à l'aide d'une arbalète.
On estime qu'elle atteint la cible dans 65 % des cas et on suppose que ses tirs sont indépendants.

Chaque tir est une expérience aléatoire à deux issues :
le succès S : « Alex atteint la cible » ; l'échec $\overline{S}$: « Alex n'atteint pas la cible ».
On sait que $P(S) = 0,65$ donc on considère chaque tir comme une épreuve de Bernoulli de paramètre 0,65.

Cette épreuve de Bernoulli est répétée trois fois de manière indépendante.
La situation peut donc être associée à un schéma de Bernoulli.

Voici l'arbre pondéré représentant cette situation.



3 Loi Binomiale

Définition
On considère un schéma de Bernoulli constitué de n épreuves où la probabilité du succès est p. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès lors de ces n épreuves.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelé loi Binomiale de paramètre n et p. On la note $\mathcal{B}(n;p)$.

Propriété
X est la variable aléatoire qui suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(n;p)$. Pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$:
$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Démonstration
Les n épreuves répétées sont identiques et indépendantes donc un chemin de l'arbre réalisant k succès de probabilité p et $n-k$ échecs de probabilité $1-p$, conduit à une issue dont la probabilité est donnée par $p^k(1-p)^{n-k}$.
Or, il y a $\binom{n}{k}$ chemins réalisant k succès. Ainsi, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Exemple
On lance quatre fois de suite un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. La variable aléatoire X compte le nombre de 6 obtenus.

La situation consiste à répéter quatre fois de manière identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli (lancer un dé) de succès "obtenir un 6", de probabilité $p = \dfrac{1}{6}$.

X est la variable aléatoire représentant le nombre de succès. X suit donc une loi Binomiale de paramètres $p = \dfrac{1}{6}$ et $n = 4$.

On peut aussi le noter $X \sim \mathcal{B}\left(4\,;\dfrac{1}{6}\right)$.

On a pour les calculs : $P(X=k) = \binom{4}{k} \left(\dfrac{1}{6}\right)^k \left(1-\dfrac{1}{6}\right)^{4-k} = \binom{4}{k} \dfrac{1}{6^k} \left(\dfrac{5}{6}\right)^{4-k}$ avec $0 \leqslant k \leqslant 4$.