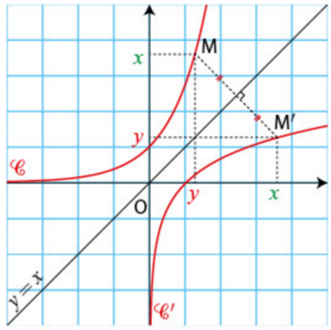
CHAPITRE 9 : La fonction Logarithme népérien

1 Définition de la fonction logarithme népérien

Définition
Pour tout réel $t > 0$, l'équation $e^x = t$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On peut donc définir une fonction sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$, qui à tout réel $t > 0$ associe l'unique réel x tel que $e^x = t$. Cette fonction est appelée fonction logarithme népérien et est notée ln.

Conséquences - Propriétés

- Pour tout $t \in]\,0\,;\,+\infty\,[$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x = t \Leftrightarrow x = ln(t)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $ln(e^x) = x$
- $ln(1) = 0\,;\, ln(e) = 1$ et $ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$
- Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Les fonctions ln et exp sont réciproques l'une par rapport à l'autre.

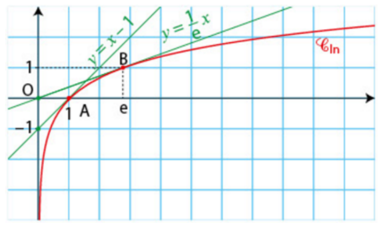


2 Étude le la fonction logarithme népérien

Propriétés

- La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.
  Et pour tout nombre réel $x > 0$, $ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} ln(x) = -\infty$
- Le tableau de variations et la courbe représentative de la fonction ln se trouvent ci-contre.

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$	||	$+$
$\ln(x)$	|| $-\infty$	↗ $+\infty$



Démonstration
f est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = e^{ln(x)} = x$. ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$:
$f'(x) = exp'(ln(x)) \times ln'(x) = e^{ln(x)} \times ln'(x) = xln'(x)$.
Or $f(x) = x$ donc $f'(x) = 1$. Par conséquent, pour tout réel $x > 0$, $ln'(x) = \frac{1}{x}$.

3 Propriétés algébriques

Propriétés
Pour tous réels a et b strictement positifs, et tout entier relatif p :

- $ln(a) = ln(b) \Leftrightarrow a = b$
- $ln(a) < ln(b) \Leftrightarrow a < b$
- $ln(a \times b) = ln(a) + ln(b)$
- $ln\left(\frac{1}{a}\right) = -ln(a)$
- $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)$
- $ln(a^p) = pln(a)$
- $ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}ln(a)$

4 Compléments sur la fonction ln

Propriétés

- Croissance comparée de $x \longmapsto x^n$ et de ln en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = 0$
- Croissance comparée de $x \longmapsto x^n$ et de ln en 0 : $\lim\limits_{x \to 0} xln(x) = 0$. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $\lim\limits_{x \to 0} x^n ln(x) = 0$

Démonstration

On pose $X = \frac{1}{x}$. On a : $-\frac{ln(X)}{X} = -\frac{ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = xln(x)$. Or, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{ln(X)}{X} = 0$. D'où : $\lim\limits_{x \to 0} xln(x) = 0$.

Propriété
u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I.
La fonction $ln(u)$ est dérivable sur I et on a : $ln(u)' = \frac{u'}{u}$.