CHAPITRE 6 : Fonctions dérivées et applications

1 Fonctions dérivées

1.1 Notion de fonction dérivée

Définition
Soit f une fonction définie sur un intervalle L. Si f est dérivable en tout réel a de I, on dit que f est dérivable sur l'intervalle I. La fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivée $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f (ou dérivée de f). On la note f'.

1.2 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Propriété

Fonction	Fonction f	Fonction dérivée f'	f étant dérivable sur
Constante	$f(x) = k$ (avec k constante réelle)	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
Identité	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
Affine	$f(x) = mx + p$ (avec m, p constantes réelles)	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
Carré	$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
Inverse	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$
Puissance	$f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
Puissance	$f(x) = \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$
Racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

Démonstrations

— On considère f le fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Soient a un réel et h un réel non nul. Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est : $\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{h^2+2ah}{h} = h + 2a$.
Or $\lim\limits_{h \to 0} h + 2ah = 2a$ donc f est dérivable en tout réel a et $f'(a) = 2a$. La fonction dérivée de f est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2x$.

— On considère la fonction racine carrée définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$. Soient a un réel strictement positif et h un réel non nul tel que $a + h \geqslant 0$. Le taux de variation de g entre a et $a + h$ est :
$\tau_a(h) = \frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{(\sqrt{a+h})^2-(\sqrt{a})^2}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$.
Or $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$. Donc g est dérivable en a et $g'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$. La fonction dérivée de g est donc définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2 Opérations sur les dérivées

2.1 Dérivée d'une somme, d'un produit par une constante réelle

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I et k une constante réelle.

Propriété
La fonction somme $u + v$ définie sur I par $x \mapsto u(x) + v(x)$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a : $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Propriété
La fonction ku définie sur I par $x \mapsto k \times u(x)$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a : $(ku)'(x) = k \times u'(x)$.

Remarque
La fonction différence $u - v$ est dérivable sur I et, pour tout réel x, on a : $(u - v)'(x) = u'(x) - v'(x)$.

2.2 Dérivée du produit de deux fonctions

Propriété
Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. Alors la fonction produit $u \times v$ définie sur I par $x \mapsto u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a : $(u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$.

Démonstration

On considère la fonction $f = u \times v$; soit a un réel de l'intervalle I et h un réel non nul tel que $(a+h)$ appartient à I. Le taux d'accroissement de f en a est :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a+h)v(a)}{h} + \frac{u(a+h)v(a)-u(a)v(a)}{h}$$
$$= u(a+h) \times \frac{v(a+h)-v(a)}{h} + \frac{u(a+h)-u(a)}{h} \times v(a)$$

Puisque u et v sont dérivables en a, alors : $\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$ et $\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$ tendent respectivement vers les réels $u'(a)$ et $v'(a)$ lorsque h tend vers zéro. De plus, on admet que $u(a+h)$ tend vers $u(a)$ lorsque h tend vers 0.

Par les règles opératoires sur les limites (admises ici), on en déduit que $\tau(h)$ tend vers $u(a)v'(a)+u'(a)v(a)$ lorsque h tend vers 0. Donc $f = u \times v$ est dérivable en a et on obtient : $f'(a) = (u \times v)'(a) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a)$.

2.3 Dérivée du quotient de deux fonctions

Propriété

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle L. On suppose que v ne s'annule pas sur l'intervalle I.

- La fonction inverse $\frac{1}{v}$, définie sur I par $x \mapsto \frac{1}{v(x)}$, est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, $\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}$.
- La fonction quotient $\frac{u}{v}$, définie sur I par $x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$, est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$.

3 Variations et extremums

On considère une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

3.1 Signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction

Propriété (admise)

- La fonction f est croissante sur I si, et seulement si : pour tout réel x de I, $f'(x) \geqslant 0$.
- La fonction f est décroissante sur I si, et seulement si : pour tout réel x de I, $f'(x) \leqslant 0$.
- La fonction f est constante sur I si, et seulement si : pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$.

Conséquences

Pour étudier les variations d'une fonction sur un intervalle I, on se ramène souvent à l'étude du signe de sa fonction dérivée sur I. Pour cela, on procède selon l'enchainement d'étapes suivant :

1. Calcul de la fonction dérivée f'.
2. Étude du signe de $f'(x)$ sur I.
3. Construction du tableau de variations de f sur I.
4. Calcul des images aux bornes de I, ainsi qu'aux éventuelles valeurs où l'on observe un changement de sens de variation de la fonction f.

3.2 Extremums d'une fonction

Définition

- Le réel M est le maximum de f sur I s'il existe un réel a tel que $f(a) = M$ et, pour tout réel x de I, $f(x) \leqslant M$. On dit alors que le maximum M de f sur I est atteint en a.
- Le réel m est le minimum de f sur I s'il existe un réel a tel que $f(a) = m$ et, pour tout réel x de I, $f(x) \geqslant m$. On dit alors que le minimum m de f sur I est atteint en a.
- On appelle extremum de f sur I le maximum ou le minimum de f sur I.
- On dit que le réel a est un extremum local de f sur l'intervalle I s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que a soit un extremum de f sur J.

Propriété

Soit a un réel de l'intervalle I qui n'est pas une borne de I.

- Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.
- Si la fonction dérivée f' s'annule en a en changeant de signe de part et d'autre de a, alors f admet un extremum local en a. On a alors deux possibilités :

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

$f(a)$ est un minimum

ou

x		a	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$

$f(a)$ est un maximum