CHAPITRE 7 : Fonctions trigonométriques

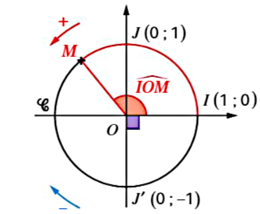
1 Enroulement sur le cercle

1.1 Le cercle trigonométrique

On se place dans un repère orthonormé $(O; I; J)$.

Définition

Le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O, de rayon 1 et orienté dans le sens direct, noté $+$, c'est à dire le sens inverse des aiguilles d'une montre.



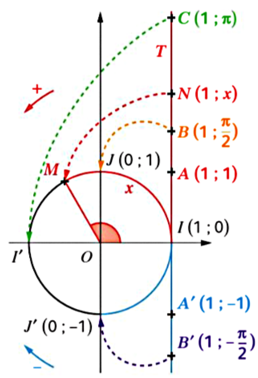
On se déplace de *I* vers *J* dans le sens positif, de *I* vers *J′* dans le sens négatif.

Remarques

- Il existe deux sens de parcours pour un point M sur $\mathscr{C}$: le sens direct $(+)$ ou sens trigonométrique; le sens indirect (-) ou sens des aiguilles d'une montre.
- Le périmètre de $\mathscr{C}$ vaut $2\pi \times 1 = 2\pi$.
- La longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$ est proportionnelle à l'angle $\widehat{IOM}$: le périmètre complet mesure 2π et l'angle complet du cercle mesure 360 degrés.

1.2 Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

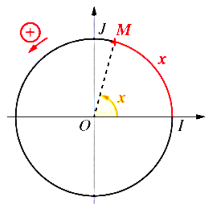
- On considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ et T sa tangente au point $I(1; 0)$. Cette droite est appelée axe des réels.
- Sur cette droite, on considère les points $A(1; +1)$ et $A'(A; -1)$. On imagine qu'on enroule cette droite autour du cercle $\mathscr{C}$. La demi-droite $[IA)$ va s'enrouler sur le cercle dans le sens positif, et la demi-droite $[IA')$ va s'enrouler dans le sens négatif.
- À tout nombre réel x, on associe le point N de la tangente T de coordonnées $(1; x)$, qui se superpose par enroulement sur un unique point M du cercle trigonométrique. M est appelé l'image de x sur le cercle $\mathscr{C}$.
- Inversement, tout point M du cercle $\mathscr{C}$ est associé à un nombre réel x où x est égal à la longueur de l'arc $\widehat{IM}$, d'origine I, d'extrémité M, et parcouru dans le sens positif.
- Tout point M du cercle $\mathscr{C}$ associé à un nombre réel x est également associé à une infinité de réels, de la forme $x + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, correspondant au nombre $|k|$ de tours supplémentaires, dans le sens direct ou indirect.



1.3 Mesure de l'angle en radian

Définition

Soit M un point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, associé à un nombre réel x.
On dit que x est une mesure en radian de l'angle au centre $\widehat{IOM}$, orienté de I vers M.



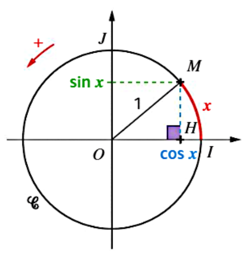
2 Cosinus et sinus d'un nombre réel

2.1 Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique

Dans ce paragraphe, on considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé $(O; I; J)$.

Définitions

- L'abscisse du point M dans le repère orthonormé $(O; I; J)$ est le cosinus du réel x, noté $cos(x)$.
- L'ordonnée du point M dans le repère orthonormé $(O; I; J)$ est le sinus du réel x, noté $sin(x)$
- Les coordonnées du point M sont donc $M(cos(x); sin(x))$.

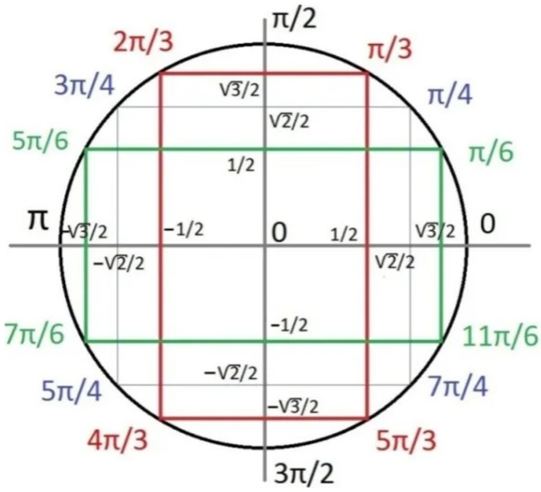


Propriétés

Pour tout nombre réel x, on a : $-1 \leqslant cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant sin(x) \leqslant 1$ et $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$.

2.2 Valeurs remarquables des cosinus et sinus

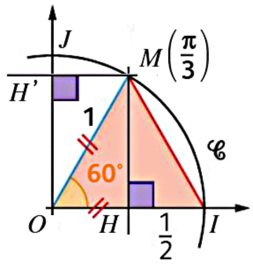
Angle $\widehat{IOM}$	0°	30°	45°	60°	90°
Réel x, dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, associé	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\widehat{IOM} = \cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\widehat{IOM} = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Démonstrations

— En notant M le point de $\mathscr{C}$ associé à $\frac{\pi}{3}$, l'angle $\widehat{IOM}$ mesure 60 degrés avec $OI = OM = 1$. Le triangle OIM est donc équilatéral. La hauteur (MH) est donc aussi une médiane du triangle OIM.
On en déduit que $cos(\frac{\pi}{3}) = x_M = OH = \frac{1}{2}$.

— En reprenant les résultats précédents, et en traçant la parallèle à l'axe des abscisses passant par M et coupant l'axe des ordonnée en H', on obtient un triangle rectangle de côtés 1, $\frac{1}{2}$ et y_M. Grâce au Théorème de Pythagore, on calcule facilement $y_M = \sqrt{1^2 - (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
On en déduit que $sin(\frac{\pi}{3}) = y_M = OH' = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



3 Fonctions cosinus et sinus

3.1 Fonction cosinus

Définition
La fonction cosinus, notée cos, est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto cos(x)$.

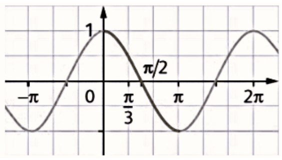
Propriétés

— La fonction cosinus est paire donc pour tout réel x : $cos(-x) = cos(x)$.

— La fonction cosinus est 2π-périodique donc pour tout réel x : $cos(x + 2\pi) = cos(x)$.

— Les variations et la courbe représentative de la fonction cosinus sont données ci-dessous :

x	0		π
cos(x)	1	↘	−1



3.2 Fonction sinus

Définition
La fonction sinus, notée sin, est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto sin(x)$.

Propriétés

— La fonction sinus est impaire donc pour tout réel x : $sin(-x) = -sin(x)$.

— La fonction sinus est 2π-périodique donc pour tout réel x : $sin(x + 2\pi) = sin(x)$.

— Les variations et la courbe représentative de la fonction sinus sont données ci-dessous :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
sin(x)	0	↗	1	↘	0