# CHAPITRE 8 : Suites arithmétiques, suites géométriques

## 1 Suites arithmétiques

### 1.1 Définitions et propriétés

Définition
Une suite est arithmétique lorsque, à partir de son terme initial, on passe d'un terme quelconque au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre réel appelé la raison de la suite.
Une suite arithmétique $(u_n)$ de terme initial $u_0$ et de raison $r$ est définie sur $\mathbb{N}$ par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$.

Remarques
Pour une suite arithmétique, la variation absolue entre deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$ est donc constante et égale à la raison $r$.

Propriétés
- Une suite arithmétique est croissante si, et seulement si sa raison est positive.
- Une suite arithmétique est décroissante si, et seulement si sa raison est négative.
- Une suite arithmétique est constante si, et seulement si sa raison est nulle.

Propriété
Soit $(u_n)$ une suite arithmétique de terme initial $u_0$ et de raison $r$. Pour tout entier naturel $n$, on a $u_n = u_0 + n \times r$. Cette relation est la forme explicite du terme général de la suite.

$$\underbrace{u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \cdots u_{n-1} \xrightarrow{+r} u_n}_{+n \times r}$$

Remarques
- Si le terme initial de la suite est $u_1$, alors $u_n = u_1 + (n-1) \times r$.
  D'une manière générale, pour tout entier $n$ et tout entier $p$, on a : $u_n = u_p + (n-p) \times r$.
- Les suites arithmétiques sont les suites $(u_n)$ dont le terme général est de la forme $u_n = a \times n + b$. De telles suites sont représentées graphiquement par des points alignés sur la droite d'équation $y = ax + b$.
- Une suite arithmétique permet donc de modéliser des phénomènes d'évolution linéaire, à variations absolues constantes.

### 1.2 Somme de termes consécutifs

Propriété
La somme des $n$ premiers termes d'une suite arithmétique est : $S_n = \dfrac{\textit{premier terme} + \textit{dernier terme}}{2}$.

Propriété
La somme des $n$ premiers entiers naturels non nuls est : $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration
Pour tout entier $n > 0$, posons $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n$. On peut également écrire cette somme dans l'ordre décroissant de $n$ à 1. En ajoutant membre à membre ces deux égalités, on a :

$$\begin{array}{rcccccc} S_n = & 1 & + & 2 & + ... + & (n-1) + & n \\ + \quad S_n = & n & + & (n-1) & + ... + & 2 \quad + & 1 \\ \hline 2S_n = & (n+1) & + & (n+1) & + ... + & (n+1) + & (n+1) \end{array}$$

Cette somme comporte ainsi $n$ termes, tous égaux à $n+1$. Donc : $2S_n = n(n+1)$ soit $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

### 1.3 Exemple

Soit $(u_n)$ la suite des entiers multiples de 5 : $0; 5; 10; 15; 20$ ; etc.

On passe d'un terme à un autre en ajoutant 5. On a donc une suite arithmétique $(u_n)$ de premier terme $u_0 = 0$ et de raison $r = 5$. Par relation de récurrence on a $u_{n+1} = u_n + 5$ et la forme explicite donne $u_n = u_0 + nr = 0 + 5n = 5n$.

Si l'on veut calculer la somme des 50 premiers termes de cette suite, il faudra alors calculer $S_{50}$ et on a :
$S_{50} = 50 \times \dfrac{0 + (5 \times 49)}{2} = 50 \times \dfrac{245}{2} = 6125$.

# 2 Suites géométriques

## 2.1 Définitions et propriétés

Définition

Une suite est géométrique lorsque, à partir de son terme initial, on passe d'un terme quelconque au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre réel appelé la raison de la suite.
Une suite géométrique $(u_n)$ de terme initial $u_0$ et de raison $q$ est définie sur $\mathbb{N}$ par la relation de récurrence : $u_{n+1} = q \times u_n$.

Remarque

- La raison d'une suite géométrique correspond au coefficient multiplicateur qui permet de passer d'un terme au terme suivant.
- Les suites géométriques permettent de modéliser des phénomènes discrets pour lesquels la variation relative entre deux termes consécutifs $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$ est constante. En effet, $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = \dfrac{q \times u_n - u_n}{u_n} = \dfrac{u_n(q-1)}{u_n} = q - 1$.
  On parle de phénomènes à évolution exponentielle.

Propriété

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de terme initial $u_0$ et de raison $q$. Pour tout entier naturel $n$, on a $u_n = u_0 \times q^n$

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \ \cdots \ u_{n-1} \xrightarrow{\times q} u_n \qquad \text{(de } u_0 \text{ à } u_n : \times q^n)$$

Remarque

Si le terme initial de la suite est $u_1$ alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$. Pour tous entiers naturels $n$ et $p$, on a $u_n = u_p \times q^{n-p}$.

Propriété

Soit la suite de terme général $q^n$ avec $q > 0$.

- Si $q > 1$ alors la suite $(q^n)$ est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite $(q^n)$ est décroissante.
- Si $q = 1$ alors la suite $(q^n)$ est constante.

Remarque

La suite de terme général $q^n$ est une suite géométrique de raison $q$ et de terme initial 1. Si $q = 0$, alors la suite est nulle à partir du second terme. Si $q < 0$, alors la suite $(q_n)$ n'est ni croissante ni décroissante.

## 2.2 Somme de termes consécutifs

Propriété

La somme des $n$ premiers termes d'une suite géométrique (de raison $q \neq 1$) est : $S_n = premier\,terme \times \dfrac{1 - q^{nombre\,de\,termes}}{1-q}$.

Propriété

Soient $n$ un entier non nul et $q$ un réel différent de 1. On a : $1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q}$.

Démonstration

On pose $S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n$. On a alors $q \times S_n = q + q^2 + ... + q^n + q^{n+1}$.
En soustrayant membre à membre, on obtient :
$S_n - qS_n = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n - (q + q^2 + ... + q^n + q^{n+1}) \Longrightarrow S_n(1-q) = 1 - q^{n+1} \Longrightarrow S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ (car $q \neq 1$).

## 2.3 Exemple

Soit $(u_n)$ la suite des puissances de 2 : $1; 2; 4; 8; 16$ ; etc.

On passe d'un terme à un autre en multipliant par 2. On a donc une suite géométrique $(u_n)$ de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 2$. Par relation de récurrence on a $u_{n+1} = 2u_n$ et la forme explicite donne $u_n = u_0 \times q^n = 1 \times 2^n = 2^n$.

Si l'on veut calculer la somme des 30 premiers termes de cette suite, il faudra alors calculer $S_{30}$ et on a :
$S_{30} = 1 \times \dfrac{1 - 2^{30}}{1-2} = \dfrac{-1073741823}{-1} = 1073741823$.