1 Primitives et équation différentielles $y' = f$

1.1 Lien entre équation différentielles $y' = f$ et primitive de f

Vocabulaire

Une équation différentielle est une équation où l'inconnue est une fonction et où interviennent des dérivées de cette fonction. Résoudre une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions solutions de l'équation.

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I .

Dire que F est une primitive de f sur I signifie que F est dérivable sur I et $F' = f$.

Exemple

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x + 2$.

La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = e^x + 2x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

En effet, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = e^x + 2 = f(x)$.

Ainsi, F est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = e^x + 2$.

Propriété (admise)

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

1.2 Primitives d'une même fonction

Propriétés

F est une primitive sur un intervalle I d'une fonction f continue sur I .

(1) Pour tout réel c , la fonction $G : x \mapsto F(x) + c$ est aussi une primitive de f sur I .

(2) Toute primitive de la fonction f sur I est de ce type. On dit aussi que "deux primitives d'une même fonction sur I diffèrent d'une constante".

Démonstration

(1) G est dérivable sur I et pour tout réel x de I , $G'(x) = F'(x) = f(x)$ donc G est aussi une primitive de f sur I .

(2) On suppose que H est une primitive de f sur I , alors H est dérivable sur I et $H' = f$. Or, $F' = f$ donc $(H - F)' = 0$ sur I . Ainsi, la fonction $H - F$ est constante sur I . Donc il existe un réel c tel que pour tout réel x de I , $H(x) - F(x) = c$ soit $H(x) = F(x) + c$.

Propriété

f est une fonction continue sur un intervalle I .

Il existe une unique primitive G de f sur l'intervalle I telle que $G(x_0) = y_0$ où x_0 est un nombre réel donné de I et y_0 un nombre réel donné.

2 Calculs de primitives

2.1 Primitives des fonctions usuelles

Soit f définie par $f(x) = \dots$	Une primitive de f est F définie par $F(x) = \dots$	L'intervalle $I = \dots$
k	$kx + c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{1}{3}x^3 + c$	$\mathbb{R}$
x^n avec $n > 0$ entier	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + c$	$] 0 ; +\infty [$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$] -\infty ; 0 [$ ou $] 0 ; +\infty [$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$] 0 ; +\infty [$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	$\mathbb{R}$

2.2 Opérations sur les primitives

Fonction u	Primitive de u sur I	Condition sur u
$u'u^n$ (avec $n \in \mathbb{Z} - -1; 0$)	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	$u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + c$	$u(x) > 0$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + c$	$u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	$u(x) > 0$
$u' + v'$	$u + v + c$	
ku'	$ku + c$	
$u'e^u$	$e^u + c$	
$u' \sin(u)$	$-\cos(u) + c$	
$u' \cos(u)$	$\sin(u) + c$	

3 Équations différentielles

3.1 Équations différentielles $y' = ay$

Propriété

Les fonction solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (avec a nombre réel non nul) sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{ax}$ où k est un nombre réel.

Démonstration

La fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax}$, avec k un nombre réel, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_k(x) = kae^{ax} = af_k(x)$. Donc f_k est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

Réciproquement, on considère une solution g sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay$. On note ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = g(x)e^{-ax}$. La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x : $\phi'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = (g'(x) - ag(x))e^{-ax}$. Or, pour tout réel x , $g'(x) = ag(x)$ donc $\phi'(x) = 0$. Ainsi, ϕ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$ et il existe un réel k tel que pour tout réel x , $\phi(x) = k$, soit $g(x)e^{-ax} = k$. On en déduit que pour tout réel x : $g(x) = ke^{ax}$.

3.2 Équations différentielles $y' = ay + b$

Propriété

Les fonction solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (avec a et b nombres réels non nuls) sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où k est un nombre réel.