CHAPITRE 10 : Orthogonalité et distances dans l'espace

1 Produit scalaire l'espace

1.1 Extension du produit scalaire à l'espace

Définition

Deux vecteurs quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont toujours coplanaires : on peut toujours trouver, en ramenant ces deux vecteurs à une origine commune A (où A est un point quelconque de l'espace) deux points B, C tels $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Les points A, B, C sont coplanaires et on peut définir le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace comme étant le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans un plan contenant les points A, B, C.

Remarque

Autrement dit, le calcul d'un produit scalaire de deux vecteurs de l'espace se ramène au calcul d'un produit scalaire de deux vecteurs dans un plan (notion vue en première).
On admet toutefois que ce produit scalaire est indépendant du choix des représentants des deux vecteurs et du choix plan.

Définitions

Le produit scalaire de deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos(\widehat{BAC})$.
- Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.

Définition

Le carré scalaire d'un vecteur $\overrightarrow{u}$, noté $\overrightarrow{u}^2$, est le produit scalaire $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$.
Ainsi, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ et pour tous points A et B, $\overrightarrow{AB}^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$.

1.2 Extension des propriétés algébriques

Propriétés

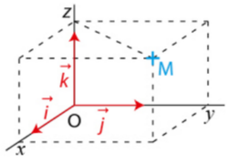
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de l'espace et k est un nombre réel.

- $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à $\overrightarrow{v}$ équivaut à $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
  Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est orthogonal à tout vecteur de l'espace.
- Symétrie et bilinéarité :
  (1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (3) $k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$
- $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
- Formules de polarisation :
  (1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$ (2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
  En particulier, pour trois points A, B, C de l'espace : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$.

2 Base orthonormée, repère orthonormé

2.1 Bases et repères orthonormés

Dire qu'une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de l'espace est orthonormée signifie que ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux et de même norme choisie pour unité ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$).
O étant un point de l'espace, le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est orthonormé lorsque la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est orthonormée.



2.2 Expression analytique du produit scalaire

Propriétés

- Dans une base orthonormée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, si $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y'; z')$ alors : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$.
- Dans une base orthonormée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y'; z')$ sont deux vecteurs.
  (1) $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux équivaut à $xx' + yy' + zz' = 0$ (2) $\|\vec{u}\|^2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- Dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ sont deux points. On a :
  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

3 Orthogonalité dans l'espace

3.1 Orthogonalité de deux droites

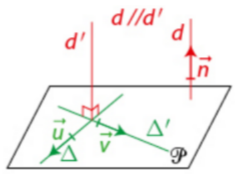
Définition
Dire que deux droites sont orthogonales signifie que leurs parallèles passant par un même point quelconque sont perpendiculaires.

Propriété
Deux droites d et d' de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont orthogonales si, et seulement si, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}' = 0$.

3.2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition
Dire qu'une droite est orthogonale à un plan signifie qu'elle est orthogonale à toute droite de ce plan.

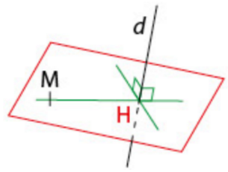
Propriété
Une droite d est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
Autrement dit : une droite d de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, il existe deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de ce plan tels que $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{0}$.



4 Projections orthogonales dans l'espace

4.1 Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définition
Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite d est le point d'intersection H de d avec le plan passant par M et orthogonal à d.

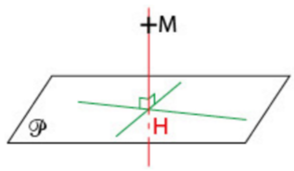


Remarques
Le plan passant par M et orthogonal à d est unique.
Lorsque $M \in d$, le projeté orthogonal de M sur d est le point M.

Propriété
Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite d est le point de d le plus proche de M. On dit que MH est la distance du point M à la droite d.

4.2 Projection orthogonale d'un point sur un plan

Définition
Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point d'intersection H du plan $\mathcal{P}$ et de la droite passant par M orthogonale à $\mathcal{P}$.



Remarque
Lorsque $M \in \mathcal{P}$, le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$ est le point M.

Propriété
Le projeté orthogonal H d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$ est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M. On dit que MH est la distance du point M au plan $\mathcal{P}$.

Démonstration
Si $M \in \mathcal{P}$, alors $MH = 0$ et H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M.
Si $M \notin \mathcal{P}$, alors pour tout point M' de $\mathcal{P}$, le triangle MHM' est rectangle en H, donc son hypoténuse est le côté le plus long, soit $MM' > MH$. Donc H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de M.