CHAPITRE 12 : Combinatoire et dénombrement

1 Dénombrement des $k - uplets$ d'éléments distincts

1.1 Nombre de $k - uplets$ d'éléments distincts d'en ensemble E

Propriété
k désigne un nombre entier naturel tel que $1 \leqslant k \leqslant n$. Le nombre de $k - uplets$ d'éléments distincts d'un ensemble E à n éléments est : $n \times (n-1) \times ... \times (n-k-1)$.

Exemple
Le nombre de $5 - uplets$ d'éléments distincts d'un ensemble à 8 éléments est $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 6720$.

1.2 Permutations des éléments d'un ensemble E

Définition
E est un ensemble fini à n éléments. Une permutation des éléments de E est un $n - uplet$ d'élément distincts de E.

Propriété
Le nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments est : $n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$.
On note ce nombre $n!$ (lire : "factorielle n"). Par convention : $0! = 1$.

Conséquence
Le nombre de $k - uplets$ d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments s'écrit aussi : $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.
En effet : $\dfrac{n!}{(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)...(n-(k-1)) \times (n-k)!}{(n_k)!} = n(n-1)...(n-k-1)$.

2 Combinaisons

2.1 Combinaisons de k éléments parmi n

Définition
E est un ensemble fini à n éléments (avec $n \in \mathbb{N}$) et k un nombre entier naturel avec $0 \leqslant k \leqslant n$. Une combinaison de k éléments de l'ensemble E est une partie (ou sous-ensemble) de k éléments de E.
Le nombre de combinaisons de k éléments parmi les n éléments de E est noté $\binom{n}{k}$ (lire : "k parmi n").

Propriété
Pour tous entiers naturels n et k, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ si $0 \leqslant k \leqslant n$ soit $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$ si $1 \leqslant k \leqslant n$.

Cas particulier
$\binom{n}{n} = 1$ car la seule partie de E à n éléments est lui-même.
$\binom{n}{0} = 1$ car l'ensemble vide est la seule partie de E qui n'a pas d'éléments.
$\binom{n}{1} = n$ car il y a n parties de E à un seul élément.

2.2 Propriétés des combinaisons

Propriété (Symétrie)
Soit si $0 \leqslant k \leqslant n$. Alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Propriété
Soit n un entier naturel. Alors $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Démonstration
Par définition, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k}$ est le nombre de combinaisons de k éléments de E.
Autrement dit, $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de E composées de k éléments.
Ainsi, d'après le principe additif, $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ est égal au nombre total de parties de E. Or il y a 2^n parties de E.
Par conséquent : $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Propriété (La relation de Pascal)
Pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leqslant k \leqslant n-1$: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Démonstration
Pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \leqslant k \leqslant n-1$:
$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!}$$

$$= \frac{k(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!k} + \frac{(n-k)(n-1)!}{(n-1-k)!(n-k)k!}$$

$$= \frac{k(n-1)!}{(n-k)!k!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{(n-k)!k!}$$

$$= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{(n-k)!k!}$$

$$= \frac{(k+n-k)(n-1)!}{(n-k)!k!}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{(n-k)!k!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$= \binom{n}{k}$.

Remarque
En considérant n (non nul) et k entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on a la relation de Pascal telle que :
$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.