CHAPITRE 13 : Somme de variables aléatoires

1 Variables aléatoires X+Y et aX

Définitions
La variable aléatoire $X+Y$ prend toutes les valeurs possibles $a_i + b_j$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$.
Loi de probabilité de $X+Y$: pour toute valeur w prise par $X+Y$, $P(X+Y=w)$ est la somme de toutes les probabilités $P(\{X=a_i\} \cap \{Y=b_j\})$ où $a_i + b_j = w$.

Définitions
a désigne un nombre réel différent de 0.
La variable aléatoire aX prend toutes les valeurs possibles $a \times a_i$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$.
Loi de probabilité de aX : pour toute valeur w prise par aX, $P(aX = w)$ est la somme de toutes les probabilités $P(\{X=a_i\})$ où $a \times a_i = w$.

Propriétés (admises)
$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ $\qquad E(aX) = aE(X)$, avec $a \neq 0$.

Exemple
En période de réglage de ses machines, le contrôleur qualité d'une usine effectue de nombreux prélèvements dans la production et relève, pour chaque pièce, si elle a un défaut A, un défaut B. Compte tenu du grand nombre de pièces prélevées, les fréquences indiquées dans ce tableau peuvent être assimilées à des probabilités.

X \ Y	0	1	2	Loi de X
0	0 0,07	1 0,18	2 0,17	0,42
1	1 0,15	2 0,20	3 0,23	0,58
Loi de Y	0,22	0,38	0,40	1

X (resp. Y) est la variable aléatoire qui compte le nombre de défauts A (resp. B). Dans le tableau figurent en rouge les valeurs prises par la variable aléatoire somme $S = X + Y$.
Voici ci-contre sa loi de probabilité.

s	0	1	2	3
$P(X=s)$	0,07	0,33	0,37	0,23

$E(X) = 0{,}42 \times 0 + 0{,}58 \times 1 = 0{,}58$ et $E(Y) = 0{,}22 \times 0 + 0{,}38 \times 1 + 0{,}4 \times 2 = 1{,}18$.
Donc $E(X) + E(Y) = 1{,}76$. $E(X+Y) = 0{,}07 \times 0 + 0{,}33 \times 1 + 0{,}37 \times 2 + 0{,}23 \times 3 = 1{,}76$.

2 Variables aléatoires indépendantes

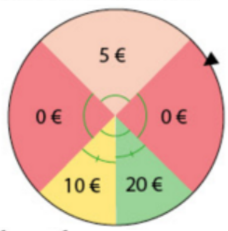
2.1 Succession d'épreuves aléatoires indépendantes

Définition
On effectue successivement deux épreuves aléatoires indépendantes l'une de l'autre. Ainsi, l'issue de la première épreuve n'influence pas l'issue de la seconde.
On note X (resp. Y) la variable aléatoire qui donne le résultat de la première (resp. la seconde) épreuve. On dit que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Conséquence
Les événements $\{X = a_i\}$ et $\{Y = b_j\}$ sont indépendants donc : $P(\{X=a_i\} \cap \{Y=b_j\}) = P(X=a_i) \times P(Y=b_j)$.

Propriétés (admise)
X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même univers et a est un nombre réel différent de 0. Si X et Y sont indépendantes alors : $\qquad V(X+Y) = V(X) + V(Y) \qquad V(aX) = a^2 V(X)$

Exemple
Dans une fête foraine, un jeu de hasard se déroule en deux temps. Le joueur fait d'abord tourner la roue ci-contre et gagne le montant indiqué dans le secteur obtenu. Puis, il pioche un jeton bonus dans un sac qui contient 25 jetons marqués 0 €, 20 jetons marqués 2 € et 5 jetons marqués 5 €.



- Calculer la probabilité p d'obtenir le même gain avec la roue et avec le jeton bonus.

X est la variable aléatoire qui donne le gain obtenu avec la roue.
Y est la variable aléatoire qui donne le gain obtenu avec le jeton bonus. X et Y sont indépendantes, car les deux tirages le sont.

a	0	5	10	20
$P(X=a)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

b	0	2	5
$P(Y=b)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$

Il y a deux gains communs à la roue et au sac : 0 € et 5 €.
$P(\{X=0\} \cap \{Y=0\}) = P(X=0) \times P(Y=0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\qquad P(\{X=5\} \cap \{Y=5\}) = P(X=5) \times P(Y=5) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{40}$

Donc la probabilité demandée est $\frac{1}{4} + \frac{1}{40} = \frac{11}{40}$.

- On note Z la variable aléatoire qui donne le gain final du joueur. Déterminer la variance de Z.

Z est la somme des variables aléatoires X et Y, soit $Z = X + Y$. Avec la calculatrice, on obtient : $V(X) = 43{,}75$ et $V(Y) = 2{,}41$.
Les variables X et Y sont indépendantes, donc : $V(Z) = V(X) + V(Y) = 43{,}75 + 2{,}41 = 46{,}16$.

2.2 Application à la loi binomiale

Propriétés
X est une variable aléatoire qui suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.
Alors on a : $E(X) = np$ $V(X) = np(1-p)$ $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Démonstration
On note X_i (avec $1 \leqslant i \leqslant n$) la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès à la $n-ime$ épreuve et 0 sinon.
Chaque variable aléatoire X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p. Ainsi :
$E(X_i) = (1-p) \times 0 + p \times 1$.
$V(X_i) = (1-p)(0-p)^2 + p(1-p)^2 = (1-p)(p^2 + p(1-p)) = p(1-p)$.
Or, $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ et X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes. En généralisant les propriétés de l'espérance et de la variance d'une somme de deux variables au cas de n variables, on obtient :
$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n) = p + p + ... + p = np$.
$v(X) = v(X_1) + v(X_2) + ... + v(X_n) = p(1-p) + p(1-p) + ... + p(1-p) = np(1-p)$.
On en déduit que $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

3 Somme et moyenne d'un échantillon

3.1 Échantillon de taille n

Un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une liste $(X_1; X_2; ...; X_n)$ de n variables aléatoires indépendantes et identiques qui suivent toutes cette loi.

3.2 Somme d'un échantillon

Définition
$(X_1; X_2; ...; X_n)$ est un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.
La somme de cet échantillon est la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

Propriétés
S_n est la somme d'un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X. On a :
$E(S_n) = nE(X)$ $V(S_n) = nV(X)$ $\sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X)$

Exemple
Le Yam's est un jeu dans lequel on lance cinq dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6, pour obtenir certaines combinaisons particulières. Pour l'une de ces combinaisons, appelée Chance, on marque la somme des numéros obtenus avec les cinq dés.

Déterminer l'espérance et l'écart-type du nombre de points que l'on peut ainsi obtenir.

X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu avec un dé. Voici ci-contre sa loi de probabilité.
Un lancer de cinq dés est alors un échantillon $(X_1 ; X_2 ; X_3 ; X_4 ; X_5)$ de taille 5 de la loi de probabilité suivie par X. La variable aléatoire S_5 somme de cet échantillon compte ainsi le nombre total de points obtenus.

a	1	2	3	4	5	6
$P(X=a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

À l'aide de la calculatrice, on obtient $E(X) = 3{,}5$ et $\sigma(X) \approx 1{,}71$.
Donc $E(S_5) = 5 \times 3{,}5 = 17{,}5$ et $\sigma(S_5) \approx \sqrt{5} \times 1{,}71$ soit $\sigma(S_5) \approx 3{,}82$.

3.3 Moyenne d'un échantillon

Définition
$(X_1; X_2; ...; X_n)$ est un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.
La moyenne de cet échantillon est la variable aléatoire $M_n = \dfrac{S_n}{n}$.

Propriétés
M_n est la moyenne d'un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X. On a :
$E(M_n) = E(X)$ $V(M_n) = \dfrac{V(X)}{n}$ $\sigma(M_n) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Exemple
Pendant la fête de l'école, Constantine a prévu de jouer 10 fois au jeu de la grenouille, dans lequel elle peut gagner un certain nombre de points, noté X. Voici la loi de probabilité de X.

a	0	5	10	20	50	100
$P(X=a)$	0,6	0,2	0,1	0,06	0,03	0,01

Déterminer l'espérance et l'écart-type du gain moyen par partie pour une série de 10 parties.

Les 10 parties sont indépendantes les unes des autres, donc elles constituent un échantillon $(X_1 ; X_2 ; \dots ; X_{10})$ de taille 10 de la loi de probabilité de X. La variable aléatoire M_{10} moyenne de cet échantillon modélise alors le gain moyen.
À l'aide de la calculatrice, on obtient $E(X) = 5{,}7$ et $\sigma(X) \approx 13{,}47$. Donc $E(M_{10}) = 5{,}7$ et $\sigma(M_{10}) \approx \dfrac{13{,}47}{\sqrt{10}}$ soit $\sigma(M_{10}) \approx 4{,}26$.