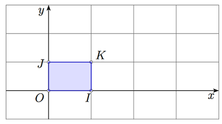
CHAPITRE 15 : Calcul intégral

1 Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle

1.1 Définitions et notation

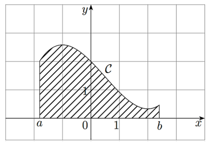
Définition

Dans un repère orthogonal $(O, \quad I, \quad J)$, on appelle unité d'aire l'aire du rectangle de côtés $[OI]$ et $[OJ]$.



Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
L'intégrale de a à b de f est la mesure, en unités d'aire, de l'aire du domaine du plan situé entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Notation

L'intégrale de a à b de f est notée : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

1.2 Expression d'une primitive à l'aide d'une intégrale

Théorème (admis)

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$. La fonction F définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur $[\,a\,;\,b\,]$: c'est la primitive de f qui s'annule en a.

Propriété

Soit f une fonction définie, continue et positive sur $[\,a\,;\,b\,]$ et soit F une primitive de f sur $[\,a\,;\,b\,]$.
Alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. On note $[F(x)]_a^b$ le nombre $F(b) - F(a)$.

Démonstration

F et F_a sont deux primitives de f sur l'intervalle $[\,a\,;\,b\,]$ donc il existe un réel c tel que pour tout réel x de $[\,a\,;\,b\,]$: $F_a(x) = F(x) + c$.
Or, $F_a(a) = 0$ donc $c = -F(a)$. Alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F_a(b) = F(b) + c = F(b) - F(a)$.

2 Intégrales de fonctions de signe quelconque sur un intervalle

Théorème (admis)

Toute fonction continue sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$ admet des primitives sur $[\,a\,;\,b\,]$.

Définition

f est une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$. Pour a et b deux nombres réels de cet intervalle, l'intégrale de a à b de f est le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[\,a\,;\,b\,]$. On la note encore : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

3 Propriétés des intégrales

❶ Linéarité

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[\,a\,;\,b\,]$ et k un nombre réel. On a :

$\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

$\displaystyle\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple

$$\begin{aligned}\int_2^3 5x^2 + x\,\mathrm{d}x &= \int_2^3 5x^2\,\mathrm{d}x + \int_2^3 x\,\mathrm{d}x \\ &= 5\int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x + \int_2^3 x\,\mathrm{d}x \\ &= 5\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^3 + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^3 = \frac{205}{6}.\end{aligned}$$

❷ Positivité

Si pour tout réel x de $[\,a\,;\,b\,]$, $f(x) \geqslant 0$ (resp. $f(x) \leqslant 0$) alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ (resp. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$).

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[\,a\,;\,b\,]$ telles que $f(x) \leq g(x)$ sur $[\,a\,;\,b\,]$.

On a : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

❸ Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[\,a\,;\,b\,]$ le nombre m défini par :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple

L'étude de la propagation de l'épidémie de grippe en France a montré que le nombre de personnes contractant la maladie au cours du $x - ieme$ jour suivant l'apparition du premier cas pouvait être modélisé par la fonction f telle que $f(x) = 225x^2 - 5x^3$.

On cherche à déterminer le nombre moyen de nouveaux cas par jour durant les 45 jours qu'a duré l'épidémie. Pour cela on calcule :

$$m = \frac{1}{45-0}\int_0^{45} 225x^2 - 5x^3\,\mathrm{d}x \simeq 37\,969.$$

❹ Relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c trois nombres de cet intervalle.

On a : $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

4 Intégration par parties

Théorème

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I. On suppose leurs fonctions dérivées u' et v' continues sur I.

Alors, pour tous réels a et b de I : $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démonstration

On a : $\displaystyle\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ (par linéarité).

La fonction uv est une primitive de la fonction $(uv)'$ donc : $\displaystyle\int_a^b (uv)'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b$.

Donc : $\displaystyle [u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$.

D'où : $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple

On cherche à calculer, par parties : $\displaystyle\int_0^\pi xsin(x)\,\mathrm{d}x$.

On pose : $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = sin(x)$, donc $v(x) = -cos(x)$.

Les fonctions u et v sont continues sur $[0;\pi]$ et leurs fonctions dérivées u' et v' continues sur $[0;\pi]$.

D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^\pi u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow \int_0^\pi xsin(x)\,\mathrm{d}x = [-xcos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \times -cos(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow \int_0^\pi xsin(x)\,\mathrm{d}x = [-xcos(x)]_0^\pi - [-sin(x)]_0^\pi$$
$$\Rightarrow \int_0^\pi xsin(x)\,\mathrm{d}x = 0 - \pi cos(\pi) - (-sin(\pi) + sin(0))$$
$$\Rightarrow \int_0^\pi xsin(x)\,\mathrm{d}x = \pi.$$