1 Limite infinie d'une suite

1.1 Limite égale à $+\infty$

Définition

Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle du type $]A; +\infty[$ (avec A un nombre réel) contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Suites de références

Les suites (kn) , (kn^2) , (kn^3) , $(k\sqrt{n})$ et (ke^n) ont pour limite $+\infty$.

1.2 Limite égale à $-\infty$

Définition

Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle du type $] -\infty; A[$ (avec A un nombre réel) contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Suites de références

Les suites $(-kn)$, $(-kn^2)$, $(-kn^3)$, $(-k\sqrt{n})$ et $(-ke^n)$ ont pour limite $-\infty$.

1.3 Suites divergentes

Vocabulaire

Si une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors on dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Propriété

Pour toute suite arithmétique (u_n) de raison r : si $r > 0$ (resp. $r < 0$) alors (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

2 Limite finie d'une suite

Définition

Dire qu'une suite (u_n) a pour limite un nombre réel l quand n vers $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Remarques

- Lorsqu'elle existe, la limite l d'une suite est unique.
- On admet que les suites $\left(\frac{k}{n}\right)$, $\left(\frac{k}{n^2}\right)$, $\left(\frac{k}{n^3}\right)$, $\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)$ et $\left(\frac{k}{e^n}\right)$ ont pour limite 0.
- Il existe des suites qui n'admettent aucune limite, comme la suite $u_n = (-1)^n$ par exemple.

Vocabulaire

On distingue deux types de suites : les suites convergentes qui ont une limite finie et les suites divergentes (qui ne sont donc pas convergentes) qui peuvent soit admettre une limite infinie, soit ne pas admettre de limite.

3 Limites et comparaison

3.1 Théorème de comparaison : limite infinie

Propriété

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que :
à partir d'un certain rang $u_n \geq v_n$ **ET** $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration

D'après la deuxième condition, tout intervalle $]A; +\infty[$ (avec A un nombre réel) contient tous les v_n à partir d'un entier naturel n_0 . Ainsi, pour tout $n \leq n_0$, $v_n > A$.

D'après la première condition, pour tout $n \leq n_0$, $u_n \geq v_n$. Donc, si l'on note N , le plus grand des entiers naturels n_0 et n_1 , alors pour tout $n \geq N$, $u_n \geq v_n > A$.

Donc l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les u_n à partir de l'entier naturel N et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Propriété

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que :
à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ **ET** $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

3.2 Théorème des gendarmes : limite finie

Théorème

Si $(u_n), (v_n), (w_n)$ sont trois suites définies sur $\mathbb{N}$ telles que :
à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n \leq w_n$ **ET** $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ (avec l un nombre réel)

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

4 Opérations et limites

(u_n) et (v_n) sont deux suites numériques définies sur $\mathbb{N}$ et l, l' désignent des nombres réels.

4.1 Somme et produit de deux suites

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \dots$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \dots$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \dots$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = \dots$	ll'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Dans les cas "FI" (forme indéterminée), on ne peut pas conclure immédiatement et tout résultat est possible. Dans un tel cas, il faut lever l'indétermination en changeant l'écriture.

Exemples cas "FI"

$u_n = n$ et $v_n = -n$ alors $u_n + v_n = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 0$.

$u_n = 2n$ et $v_n = -n$ alors $u_n + v_n = n$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

4.2 Quotient de deux suites

(v_n) est une suite telle que pour tout entier naturel $n, v_n \neq 0$.

• Cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \dots$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \dots$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

• Cas où $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \dots$	0 en restant positif	0 en restant positif	0 en restant négatif	0 en restant négatif	0
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \dots$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemple

(w_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \frac{1}{n^2 + 1}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 1) = +\infty$ donc d'après les règles opératoires ci-dessus : $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.