CHAPITRE 9 : Fonction exponentielle

1 La fonction exponentielle

1.1 Définition et propriétés

Définition
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée fonction exponentielle et est notée exp.
Ainsi, pour tout réel x, $exp(x)' = exp(x)$ et $exp(0) = exp(1)$.

Propriété
Pour tout réel x, on a $exp(x) \times exp(-x) = 1$. En conséquence, pour tout réel x, $exp(x) \neq 0$.

Propriétés
Pour tout réel x et y et pour tout entier relatif n, on a :
$exp(-x) = \dfrac{1}{exp(x)}$ $\qquad exp(x-y) = \dfrac{exp(x)}{exp(y)}$ $\qquad exp(x+y) = exp(x) \times exp(y)$ $\qquad exp(nx) = (exp(x))^n$

2 Notation e

2.1 Nombre e et notation e^x

Définition
L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e. Ainsi, $exp(1) = e$.
Par convention, on décide de noter pour tout réel x : $exp(x) = e^x$.

Propriété
Avec la notation utilisant le nombre e, on a : $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ $\qquad e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ $\qquad e^{x+y} = e^x \times e^y$ $\qquad e^{nx} = (e^x)^n$

Remarques
Les propriétés algébriques précédentes permettent d'écrire, pour tous entiers n et m : $exp(n) = e^n$ $\qquad e^{n+m} = e^n \times e^m$

2.2 Lien avec les suites géométriques

Propriété
Pour tout réel a, la suite e^{an} est une suite géométrique.

Démonstration
Soit a un réel. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = e^{an}$.
Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = e^{a(n+1)} = e^{an+a} = e^{an} \times e^a = u_n \times e^a$.
On en déduit que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison e^a et de premier terme $u_0 = e^0 = 1$.

3 Étude de la fonction exponentielle

3.1 Signe et sens de variation

Propriété
La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi pour tout réel x, on a : $e^x > 0$.

Démonstration
Pour tout réel x, on peut écrire $e^x = e^{2\times\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$.
Le carré d'un nombre réel étant toujours positif, on en déduit que pour tout réel x, $e^x \geqslant 0$. De plus, on sait que pour tout réel x, $e^x \neq 0$. Ainsi, $e^x > 0$.

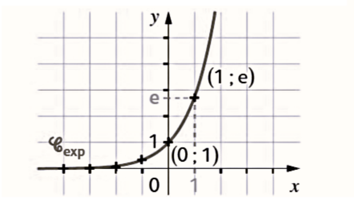
Propriété
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque
Ce résultat permet de résoudre des équation et des inéquations. Pour tous réels a et b : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ $\qquad e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

3.2 Représentation graphique

Tableau de valeur et représentation graphique de la fonction exponentielle

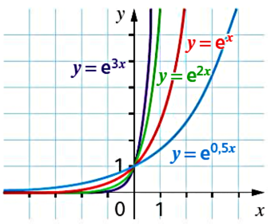
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
e^x	0,02	0,05	0,14	0,37	1	2,72	7,39	20,09	54,60



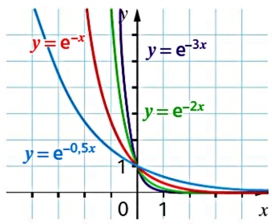
Remarques

- La courbe $\mathscr{C}_{exp}$ passe par les points de coordonnées $(0;1)$ et $(1;e)$.
- La courbe $\mathscr{C}_{exp}$ est entièrement située au-dessus de l'axe des abscisses et ne la coupe jamais.

Représentations graphiques d'autres fonctions exponentilles



Croissance exponentielle
$t \mapsto e^{kt}$, où $k > 0$



Décroissance exponentielle
$t \mapsto e^{-kt}$, où $k > 0$

3.3 Dérivée de la fonction $exp(ax+b)$

Propriété

Soient a et b deux réels. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Et pour tout réel x, $f'(x) = a \times e^{ax+b}$.