CHAPITRE 10 : Produit scalaire et applications

1 Produit scalaire dans le plan

1.1 Norme d'un vecteur

Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

Remarque

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, si $\vec{u}\binom{x}{y}$ et si le point M a pour coordonnées $(x; y)$: $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\|\vec{u}\| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$.

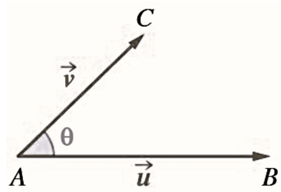
1.2 Définition du produit scalaire

Définition

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le nombre réel, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ défini de la manière suivante :

— Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est égal à 0.

— Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas nuls, on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et on note θ une mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel défini par : $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \ \|\vec{v}\| \times \cos(\theta)$.



Ainsi : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

Cas particulier des vecteurs colinéaires

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires non nuls, alors : $\vec{u}.\vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens} \\ -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$

Propriété

Le produit scalaire est symétrique : pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.

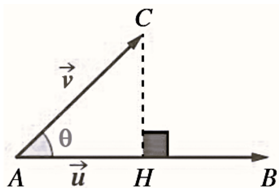
1.3 Orthogonalité et produit scalaire

Propriété

Pour tous points A, B et C distincts du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \begin{cases} AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraire} \end{cases}$$

où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).



Définition

On dit que deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires. Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

1.4 Exemples

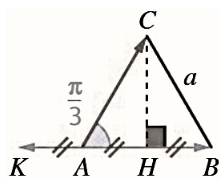
Soit ABC un triangle équilatéral de côté a. Soit H le milieu de $[AB]$ et K le point tel que $\overrightarrow{AK} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = a \times a \times \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{a^2}{2}$.

$\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AB} = -AK \times AB = -\dfrac{a^2}{2}$ puisque $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires de sens contraires.

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{BK} = BH \times BK = \dfrac{a}{2} \times \dfrac{3a}{2} = \dfrac{3a^2}{4}$ car H est le projeté orthogonal de C sur (BK).

$\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AK} = 0$ puisque (CH) et (AK) sont perpendiculaires.



2 Propriétés du produit scalaire

2.1 Produit scalaire et normes

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right] = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]$.

2.2 Produit scalaire en repère orthonormé

Propriété

Dans un repère orthonormé, pour tous vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$, on a : $\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$.

Conséquence

$\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

2.3 Bilinéarité du produit scalaire et conséquences

Propriété

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan et pour tout réel k :
(1) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$.
(2) $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$.
(3) $\vec{u}.(k\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$.

Définition

On appelle carré scalaire de $\vec{u}$ le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même. On le note $\overrightarrow{u}^2$. Ainsi, on a $\overrightarrow{u}^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$.
En particulier, si A et B sont deux points du plan, $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$.

Propriété

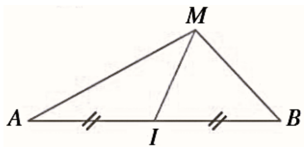
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a :
(4) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ soit $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
(5) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ soit $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
(6) $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$.

3 Calcul de longueurs et d'angles

3.1 Transformation de l'expression $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

Propriété

Soient deux points distincts A et B du plan et I le milieu du segment $[AB]$.
Pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}^2 - \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2$.



Propriété

Soient deux points distincts A et B du plan et I le milieu du segment $[AB]$.
L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Démonstration

Soit M un point du plan et soit I le milieu d'un segment $[AB]$ de ce plan.
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \iff (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) = 0 \iff (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{-IA}) = 0 \iff \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = 0 \iff MI^2 - IA^2 = 0$.
Donc $MI^2 = IA^2$ et ainsi $MI = IA$. L'ensemble cherché est donc le cercle de centre I et de rayon IA.

3.2 Formules d'Al-Kashi

Propriété

Soit ABC un triangle. On a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.
En posant $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. Alors :
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$; $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B})$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C})$.

Démonstration

On a $BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$.
Soit $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$.

Exemple

On considère le triangle ABC tel que : $AB = 4, AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 70°$.

- Calcul de la longueur BC :
  $BC^2 = a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A}) = 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4\cos(70) = 20 - 16\cos(70)$
  d'où $BC \simeq 3,8$.
- Calcul d'une mesure de $\widehat{B}$: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B})$ donc $\cos(\widehat{B}) = \frac{b^2-a^2-c^2}{-2ac}$
  d'où $\widehat{B} \simeq 29,5°$.