CHAPITRE 11 : Variables aléatoires

1 Notion de variable aléatoire

On considère une expérience aléatoire associée à un univers Ω fini sur lequel on a défini une loi de probabilité P.

1.1 Variable aléatoire

Définition
Une variable aléatoire X est une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui à tout élément de Ω fait correspondre un nombre réel.

Remarques
- Comme Ω est fini, l'ensemble des valeurs prises par X, c'est-à-dire des images par X, est fini.
  On parle de variable aléatoire discrète.
- Pour une même expérience aléatoire, on peut définir plusieurs variables aléatoires. On les nomme en général avec une lettre majuscule, par exemple X, Y, Z ou S.

Notations
Soit a un nombre réel. On note :
- $\{X = a\}$ l'événement "la variable aléatoire X prend la valeur a".
- $\{X \geqslant a\}$ l'événement "la variable aléatoire X prend une valeur supérieure ou égale à la valeur a".

On peut définir de manière analogue les événements : $\{X > a\}, \{X < a\}$ et $\{X \leqslant a\}$.

1.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition
Soit X une variable aléatoire définie sur Ω. Définir la loi de probabilité de X, c'est associer à chacune des valeurs prises par X sa probabilité. Autrement dit, en notant $x_1, x_2, \dots x_n$ les valeurs prises par X, c'est donner les valeurs des probabilités $P(X = x_i)$ pour tout entier i, où $1 \leqslant i \leqslant n$. On présente en général une loi de probabilité sous forme d'un tableau :

Valeurs x_i prises par X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Propriété
Dans le tableau qui donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire, la somme des probabilités est égale à 1.
Autrement dit, si on note $x_1, x_2, \dots x_n$ les valeurs prises par X, on a : $P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_n) = 1$.
On peut utiliser le symbole $\sum$ pour écrire la somme : $\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$.

2 Espérance, variance et écart type

Dans ce paragraphe, on considère une variable aléatoire X définie sur un univers Ω fini et dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

Valeurs x_i prises par X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

2.1 Définitions

Définition
L'espérance de la variable aléatoire X est le réel noté $E(X)$ défini par : $E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \dots + p_n \times x_n$.
Ce que l'on peut noter : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times x_i$.

Interprétation
L'espérance s'interprète comme la valeur moyenne prise par la variable aléatoire X lorsque l'on répète un grand nombre de fois l'expérience.

Définitions
- La variance de la variable aléatoire X est le réel positif noté $V(X)$ défini par :
  $V(X) = p_1 \times (x_1 - E(X))^2 + \dots + p_n \times (x_n - E(X))^2$.
  Ce que l'on peut noter : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \times (x_i - E(X))^2$.
- L'écart type, noté $\sigma(X)$, est le réel égal à la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Interprétation
La variance représente la moyenne des carrés des écarts à l'espérance $E(X)$. Elle mesure la dispersion des valeurs prises par la variable aléatoire X autour de son espérance $E(X)$.

2.2 Linéarité de l'espérance

Si a et b sont deux réels, on peut définir sur Ω une nouvelle variable aléatoire $\boldsymbol{Y = aX+b}$, dont les images sont $y_i = a \times x_i + b$ pour tout entier i de 1 à n.

Propriétés
Soient a et b deux réels ; on pose $Y = aX + b$. Alors :
(1) $E(Y) = aE(X) + b$.
(2) $V(Y) = a^2V(X)$.
Par conséquent : $\sigma(Y) = |a|\sigma(X)$.

3 Exemple

Un jeu consiste à lancer deux pièces de monnaie équilibrées différentes. On note F quand on obtient Face et P quand on obtient Pile. Les quatre issues de l'expérience forme l'univers : $\Omega = \{FF; FP; PF; PP\}$.
On fixe la règle du jeu suivante : à chaque Pile obtenu, on gagne 3 euros et à chaque face obtenue on perd 1 euro.

Loi de probabilité
On note X la variable aléatoire représentant le gain du joueur en euros. X prend donc les valeurs -2 ; 2 ou 6.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X peut être résumée dans le tableau suivant :

x_i	-2	2	6
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Espérance, variance et écart type
$E(X) = \frac{1}{4} \times (-2) + \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{4} \times 6 = 2$.
$V(X) = \frac{1}{4} \times (-2-2)^2 + \frac{1}{2} \times (2-2)^2 + \frac{1}{4} \times (6-2)^2 = 8$.
$\sigma(X) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,8$.
Un joueur peut espérer obtenir, en moyenne, sur un grand nombre de parties, 2 euros par partie, avec une fluctuation importante d'environ $2,8$ euros.

Linéarité de l'espérance
On considère de nouveau le jeu précédent, cependant, on change une règle : on double les gains et on instaure une mise de 5 euros. On note Y la variable aléatoire représentant le gain du joueur dans ce nouveau jeu. On a donc : $Y = 2X - 5$.
On peut calculer l'espérance :
$E(Y) = 2 \times E(X) - 5 = 2 \times 2 - 5 = -1$.
Avec ces nouvelles règles, le joueur est en moyenne perdant d'un euro par partie.