CHAPITRE 1 : Dénombrement, récurrence

1 Ensembles finis

1.1 Principe additif

Définition
Un ensemble fini est un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments.

Principe additif
Si A et B sont deux parties disjointes d'un ensemble fini E, constituées respectivement de m et n éléments, alors le nombre d'éléments de la réunion $A \cup B$ est la somme $m + n$.

Notation
$Card(A)$ (lire "cardinal de A") désigne le nombre d'éléments d'une partie A d'un ensemble fini E.
Dans le cas général, pour toutes parties A, B de E : $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$.

1.2 Principe multiplicatif

Définition
Le produit cartésien de deux ensembles finis E et F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples $(x; y)$ où x est un élément de E et y un élément de F.

Exemple
$E = \{a ; b\}$ et $F = \{1 ; 2 ; 3\}$.
$E \times F = \{(a ; 1) ; (a ; 2) ; (a ; 3) ; (b ; 1) ; (b ; 2) ; (b ; 3)\}$
On peut représenter cela grâce au tableau croisé ci-contre ou à un arbre.

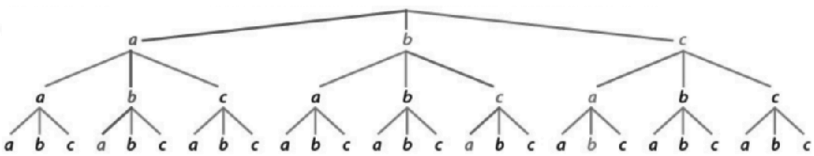
E \ F	1	2	3
a	$(a;1)$	$(a;2)$	$(a;3)$
b	$(b;1)$	$(b;2)$	$(b;3)$

Principe multiplicatif
Si E et F sont deux ensembles finis constitués respectivement de m et n éléments, alors $E \times F$ est un ensemble fini dont le nombre d'éléments est le produit mn.

1.3 Ensemble de k-uplets d'un ensemble fini E

Définition
E est un ensemble fini à n éléments, k est un nombre entier naturel non nul.
Un $k - uplet$ d'éléments de E est une liste ordonnée de k éléments de E, distincts ou confondus.
L'ensemble de tous les $k - uplets$ de E est l'ensemble $E \times E \times ... \times E$ (k fois), noté E^k.

Exemple
$E = \{a ; b ; c\}$. Cet arbre permet de lister les triplets de E^3.
• $(a ; b ; a) \in E^3$
• $(b ; c ; a)$ et $(c ; a ; b)$ sont des triplets différents de E^3.



2 Le raisonnement par récurrence

Axiome de récurrence
$P(n)$ est une propriété qui dépend d'un nombre n de $\mathbb{N}$ et n_0 désigne un nombre de $\mathbb{N}$. Si la propriété $P(n)$ vérifie les deux conditions suivantes :
1− Initialisation : $P(n_0)$ est vraie
2− Hérédité : si $P(k)$ est vraie pour un nombre entier naturel $k \geq n_0$ alors $P(k+1)$ est vraie
alors, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exemple
(v_n) est la suite définie par $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n + 2n + 2$. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n = n(n+1)$.

Pour tout entier naturel n, P(n) est la propriété : « $v_n = n(n+1)$ ».
• **Initialisation** : pour $n = 0$, $v_0 = 0$ et $0(0+1) = 0$. La propriété P(0) est donc vraie.
• **Hérédité** : on suppose que, pour un entier naturel k, la propriété P(k) est vraie, c'est-à-dire que $v_k = k(k+1)$ (hypothèse de récurrence).
Or $v_{k+1} = v_k + 2k + 2$. Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, $v_{k+1} = k(k+1) + 2k + 2$ d'où $v_{k+1} = (k+1)(k+2)$.
La propriété P($k+1$) est donc vraie.
• **Conclusion** : pour tout entier naturel n, la propriété P(n) est vraie, c'est-à-dire, pour tout entier naturel n, $v_n = n(n+1)$.

Nombre d'éléments de E^k

k est un nombre entier naturel, $k \geq 1$ et E est un ensemble fini à n éléments ($n \in \mathbb{N}$).
Le nombre de $k - uplets$ de E est n^k, c'est à dire $Card(E^k) = n^k$.

3 Nombre de parties d'un ensemble

Notations

- La notation $A \subset E$ (lire "A est inclus dans E") signifie que tout élément de A appartient à E.
  Autrement dit, A est une partie (ou sous-ensemble) de E.
- On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties d'en ensemble E.
- L'ensemble vide, noté $\varnothing$, est une partie de tout ensemble.

Propriété

n désigne un nombre entier naturel. Un ensemble fini E à n éléments possède 2^n parties, c'est à dire $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.