

CHAPITRE 2 : Probabilités Conditionnelles

On considère une expérience aléatoire, d'univers associé Ω , muni d'une loi de probabilité P .

1 Probabilités conditionnelles

1.1 Réalisation d'un événement sous condition

Définition

Soient A et B deux événements de Ω avec $P(A) \neq 0$. On note $P_A(B)$ la probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé. On a : $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

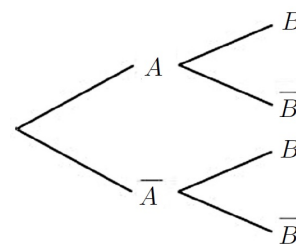
Remarques

- $P_A(B)$ se lit "probabilité conditionnelle de B sachant A ".
- $P_A(A) = 1$: sachant que A est réalisé, la probabilité de A est égale à 1, c'est-à-dire que A est devenu certain.
- En situation d'équiprobabilité, on a : $P_A(B) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A \cap B}{\text{nombre d'éléments de } A}$. Ainsi, l'ensemble de référence n'est plus Ω mais A .
- Si la probabilité conditionnelle $P_A(B)$ est connue, la probabilité de l'événement $A \cap B$ peut être calculée : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

1.2 Arbre pondéré et probabilités conditionnelles

De nombreuses situations peuvent être modélisées par des arbres à deux niveaux comme celui ci-contre où A et B sont deux événements de Ω avec $P(A) \neq 0$. Sur chaque branche, on reporte la probabilité associée. On obtient ainsi un arbre pondéré.

- La probabilité sur la branche haute du premier niveau correspond à la probabilité $P(A)$ de l'événement A .
- La probabilité sur la branche haute du second niveau est la probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé, c'est-à-dire $P_A(B)$.
- Les probabilités du second niveau sont toutes des probabilités conditionnelles.
- Le chemin complet A suivi de B représente l'événement $A \cap B$.
- La somme des probabilités sur toutes les branches de même origine est égale à 1. Ainsi on a : $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$.



Propriété

La probabilité d'un chemin complet est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche du chemin : c'est le principe multiplicatif.

Remarque

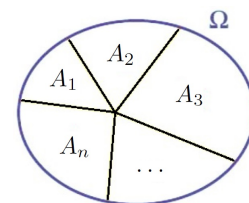
Le principe multiplicatif dans un arbre s'appuie sur l'égalité suivante : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

2 Formule des probabilités totales

2.1 Partition d'un univers

Définition

Les événements $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ d'un univers Ω , de probabilités non nulles, forment une partition de l'univers lorsqu'ils sont deux à deux incompatibles et $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.



Remarques

- On dit que deux événements A et B sont incompatibles ou disjoints lorsqu'on a : $A \cap B = \emptyset$. A et B ne peuvent pas se produire simultanément.
- Un système complet d'événements correspond, en géométrie, au "pavage" d'une figure : deux morceaux distincts ne se chevauchent pas (événements disjoints) et leur assemblage (la réunion) reconstitue la figure toute entière (l'univers en probabilité).

Propriété

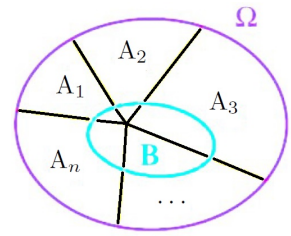
Soit A un événement d'un univers Ω de probabilité non nulle et $\overline{A}$ son événement complémentaire (appelé aussi événement contraire). Les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers Ω .

2.2 Formule des probabilités totales

Propriété

Soient $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ des événements d'un univers Ω , de probabilités non nulles, qui forment une partition de l'univers Ω .

Pour tout événement B de l'univers Ω , on a la formule suivante, appelée formule des probabilités totales : $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$.



Conséquences

- Pour tous événements A et B avec $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$. La formule des probabilités totales peut donc s'écrire sous la forme : $P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$.
- Soit A un événement d'un univers Ω de probabilité distincte de 0 et 1. On sait que A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers Ω . Donc, pour tout événement B , on a $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.

3 Indépendance en probabilité

3.1 Événements indépendants

Définition

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. A et B sont indépendants si, et seulement si $P_A(B) = P(B)$ (ou bien si, et seulement si $P_B(A) = P(A)$).

Remarques

- L'égalité $P_A(B) = P(B)$ traduit le fait que la réalisation de A ne modifie pas la probabilité de l'événement B .
- Attention, il ne faut pas confondre événements indépendants et événements incompatibles. Des événements incompatibles ne sont pas indépendants.

Définition

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. Si A et B sont deux événements indépendants alors les événements $\bar{A}$ et B sont aussi indépendants.

3.2 Épreuves indépendantes

Définition

On appelle succession de deux épreuves indépendantes la répétition à l'identique d'une expérience aléatoire deux fois, les résultats de la première épreuve n'influençant pas ceux de la seconde.

Remarques

- Lors de la succession de deux épreuves indépendantes, les probabilités de chaque issue ne changent pas.
- On peut assimiler une succession de deux épreuves indépendantes à deux tirages successifs avec remise. En effet, lors de deux tirages successifs avec remise, les résultats du premier tirage n'influencent pas ceux obtenus au second tirage.
- Pour représenter une succession de deux épreuves indépendantes, on peut utiliser un arbre pondéré à deux niveaux. Les événements et leurs probabilités restent les mêmes entre le premier niveau et le second niveau de l'arbre.

4 Exemple

Une société emploie 40% de cadres. 55% des cadres et 30% des non-cadres sont des femmes. Dans la base de données des employés, on tire au hasard le nom de l'un des employés. On note C l'événement "l'employé est cadre" et F l'événement "l'employé est une femme".

- Dans cette situation, on obtient l'arbre de probabilité ci-contre.
- La probabilité de tirer le nom d'un employé qui soit un cadre et une femme est égale à : $P(C \cap F) = 0,4 \times 0,55 = 0,22$.
- L'employé est un cadre. La probabilité que ce soit une femme est de : $P_C(F) = 0,55$.
- La probabilité de l'événement "l'employé est une femme" est égale à : $P(F) = P(C \cap F) + P(\bar{C} \cap F) = 0,22 + 0,6 \times 0,3 = 0,4$.
- $P(C \cap F) = 0,22 \neq P(C) \times P(F) = 0,4 \times 0,4 = 0,16$ donc les événements C et F ne sont pas indépendants.

