CHAPITRE 1 : Fonction polynôme du second degré, équations

1 Racines et formes factorisées

1.1 Racine d'une fonction polynôme du second degré

Définition
Une fonction polynôme du second degré est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels avec $a \neq 0$. Cette forme est la forme développée de f, et les réels a, b et c sont les coefficients de f.

Définition
On appelle racine de la fonction polynôme du second degré f tout nombre réel x_1 tel que $f(x_1) = 0$. Autrement dit, une racine de f est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

Exemple
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)(x+2) = 2x^2 + 3x - 2$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = 2$, $b = 3$ et $c = -2$.
En résolvant une équation produit nul à partir de la forme "d'origine" de la fonction f, on trouve deux racines : $x_1 = -2$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.

1.2 Factorisation d'une fonction polynôme du second degré

Propriété
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. Si le réel x_1 est une racine de f, alors f peut se factoriser par $x - x_1$ sous la forme : $f(x) = (x - x_1)(ax + d)$, où d est un nombre réel.

Conséquences
- Si f admet deux racines x_1 et x_2, f peut se factoriser par $(x - x_1)(x - x_2)$.
- Une fonction polynôme du second degré admet au plus deux racines.

Propriété
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax_2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. Si f admet les réels x_1 et x_2 pour racines, alors f s'écrit sous forme factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemple
Avec la fonction f du premier exemple, on obtient comme forme factorisée : $f(x) = 2(x+2)(x - \frac{1}{2})$.

1.3 Somme et produit des racines d'une fonction polynôme du second degré

Propriété
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax_2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. Si f admet les réels x_1 et x_2 pour racines, alors :
- la somme des racines est : $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$.
- le produit des racines est : $P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Exemple
Avec la fonction f du premier exemple, on obtient comme somme des racines $S = -2 + \frac{1}{2} = -1,5$ et comme produit $P = -2 \times \frac{1}{2} = -1$.

Remarques
- Si on connaît une racine d'une fonction polynôme du second degré, on peut calculer l'autre racine rapidement en utilisant la somme ou le produit des racines.
  On aura donc intérêt à repérer, lorsque cela est possible, une racine "évidente" parmi des nombres simples comme 0, 1, -1, 2, -2, etc.
- La connaissance de la somme et du produit des racines permet de donner des informations sur le signe des racines.

2 Équations du second degré

2.1 Forme canonique d'un polynôme du second degré

Propriété
Toute fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$ s'écrit sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$, où α et β sont des nombres réels, appelée la forme canonique de f.

Démonstration
Puisque $a \neq 0$: $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2) + c = a((x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2)) + c$.
Ainsi : $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et on obtient : $f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a}$.
En posant finalement $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$ on retrouve : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Exemple
Toujours avec la fonction f du premier exemple, $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$, on factorise par a : $f(x) = 2(x^2 + \frac{3}{2}x - 1)$.
On reconnaît ensuite dans l'écriture entre parenthèses le début du développement d'un carré :
$x \times x + 2 \times x \times \frac{3}{4} + (\frac{3}{4})^2 - (\frac{3}{4})^2 - 1 = (x + \frac{3}{4})^2 - (\frac{3}{4})^2 - 1 = (x + \frac{3}{4})^2 - \frac{25}{16}$.
Donc la forme canonique de f est : $f(x) = 2(x + \frac{3}{4})^2 - \frac{25}{8}$.

2.2 Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$

Définition
Si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, on appelle discriminant de f le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriété
Pour résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a \neq 0$, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

— Si $\Delta < 0$: l'équation n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.
— Si $\Delta = 0$: l'équation admet une unique solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
— Si $\Delta > 0$: l'équation admet deux solutions $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Démonstration
On utilise le résultat obtenu à la démonstration précédente. Pour $a \neq 0$, on a :
$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$.
- Si $\Delta < 0$: pas de solution car $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ et $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$.
Donc l'équation admet deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Exemple
On garde toujours la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ avec $a = 2$, $b = 3$ et $c = -2$.
On veut résoudre l'équation $f(x) = 0$
Donc : $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25 > 0$.
Ainsi l'équation admet deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Propriété
Suivant le signe de Δ, on peut factoriser la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$:

— Si $\Delta < 0$: pas de factorisation possible.
— Si $\Delta = 0$: $f(x) = a(x - x_0)^2$ où x_0 est l'unique racine de f.
— Si $\Delta > 0$: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines de f.

Exemple
La fonction f précédente, qui admet pour racines -2 et $\frac{1}{2}$, avec $a = 2$, se factorise donc sous la forme : $f(x) = 2(x+2)(x-\frac{1}{2})$.