Devoir Surveillé n°1 Correction

Exercice 1 — 10 points

1. **(3 pts)** $\left\{\begin{array}{c} x-y=10 \\ x\times y=-16 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=10+y \\ x\times y=-16 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=10+y \\ (10+y)\times y=-16 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=10+y \\ y^2+10y+16=0 \end{array}\right.$.
   On calcule le discriminant : $\Delta = 10^2-4\times1\times16 = 100-64 = 36$ donc $y_1 = \dfrac{-10-6}{2} = -8$ et $y_2 = \dfrac{-10+6}{2} = -2$.
   Ainsi : $x_1 = 10-8 = 2$ et $x_2 = 10-2 = 8$.
   Les solutions de ce système sont donc : $S = \{\,(2;-8)\,;\,(8;-2)\,\}$

2. **(2 pts)** $(x-3)^2-49 = (x-3)^2-7^2 = (x-3-7)(x-3+7) = (x-10)(x+4)$.

3. **(2 pts)** On calcule le discriminant :
   $\Delta = (-9)^2-4\times1\times20 = 81-80 = 1$ donc $x_1 = \dfrac{9-1}{2} = 4$ et $x_2 = \dfrac{9+1}{2} = 5$.
   Ainsi : $x^2-9x+20 = (x-4)(x-5)$.

4. **(2 pts)** On calcule tout d'abord le discriminant de $2x^2-3x+2$: $\Delta = (-3)^2-4\times2\times2 = 9-16 = -7 < 0$.
   Donc le polynôme de second degré $2x^2-3x+2$ n'est pas factorisable et $(2x^2-3x+2)^2 = 0$ n'a pas de solution.
   Ainsi, les solutions de l'équation $(3x-1)(2x^2-3x+2)^2 = 0$ sont celles de $3x-1=0 \Longrightarrow x = \dfrac{1}{3}$. D'où $S = \{\frac{1}{3}\}$.

5. **(1 pt)** $f(0) = 4\times0^2+7\times0-5 = -5 \neq 0$. Donc 0 n'est pas une racine de la fonction f.

Exercice 2 — 10 points

1. (a) **(2 pts)** x_1 et de x_2 sont les racines de la fonction f. Ainsi, ce sont les solutions de $f(x)=0$. Or, d'après le graphique, on observe que $f(4) = f(8) = 0$. Donc $x_1 = 4$ et $x_2 = 8$.

   (b) **(1 pt)** Avec la question précédente, on a : $f(x) = a(x-4)(x-8)$. Comme $D(\,5\,;\,1,80\,) \in \mathscr{C}$ alors : $f(5) = a(5-4)(5-8) = 1,80 \Longrightarrow 1,80 = -3a \Longrightarrow a = -0,6$.

   (c) **(1 pt)** L'expression complète de la forme factorisée de la fonction f est : $f(x) = -0,6(x-4)(x-8)$.

2. **(1 pt)**On développe le résultat de la question précédente :
   $f(x) = -0,6(x-4)(x-8) = -0,6(x^2-8x-4x+32) = -0,6(x^2-12x+32) = -0,6x^2+7,2x-19,2$.

3. **(2 pts)** Avec les formules du cours, on a :
   $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{7,2}{-1,2} = 6$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{(7,2)^2-4\times(-0,6)\times(-19,2)}{4\times(-0,6)} = -\dfrac{5,76}{-2,4} = 2,4$.
   Donc la forme canonique de f est : $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta = -0,6(x-6)^2+2,4$.

4. En utilisant la forme la plus adaptée, déterminer :

   (a) **(1 pt)** On utilise la forme développée : $f(7) = -0,6\times7^2+7,2\times7-19,2 = 1,8$ m.
   La hauteur de l'arche lorsque $x = 7$ m est de $1,8$ m.

   (b) **(2 pts)** On utilise la forme canonique :
   $(x-6)^2 \geqslant 0 \Longrightarrow -0,6(x-6)^2 \leqslant 0 \Longrightarrow -0,6(x-6)^2+2,4 \leqslant 2,4 \Longrightarrow f(x) \leqslant 2,4$.
   La hauteur maximale de l'arche est de $2,4$ m.