

EXERCICE 1
1+0,5+0,5 = 2 points

$P(0) : w_0 = 2 + 3^0 = 2 + 1 = 3$. D'après l'énoncé, $w_0 = 5$. Donc $P(0)$ n'est pas vraie. Ainsi la propriété n'est pas vraie pour tout entier naturel n .

EXERCICE 2
0,5+0,5+0,5+2+0,5 = 4 points

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété $P(k) : v_k = k^2$ vraie. On veut montrer qu'elle est vraie au rang $k + 1$:

$P(k + 1) : v_{k+1} = (k + 1)^2$. On a :

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= v_k + 2k + 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2. \end{aligned}$$

Donc la propriété $P(k + 1)$ est vraie.

EXERCICE 3
1+4+1 = 6 points

Initialisation

On a $P(1) : \frac{15}{4} \times 0,5^1 = \frac{15}{8}$. Or d'après l'énoncé $u_1 = 3,4$. $3,4 \geq \frac{15}{8}$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose la propriété $P(k) : u_k \geq \frac{15}{4} \times 0,5^k$ vraie. On veut montrer qu'elle est vraie au rang $k + 1$:

$P(k + 1) : u_{k+1} \geq \frac{15}{4} \times 0,5^{k+1} = \frac{15}{8} \times 0,5^k$. On a :

$$u_k \geq \frac{15}{4} \times 0,5^k$$

$$\frac{1}{5}u_k \geq \frac{1}{5} \times \frac{15}{4} \times 0,5^k$$

$$\frac{1}{5}u_k \geq \frac{3}{4} \times 0,5^k$$

$$\frac{1}{5}u_k + 3 \times 0,5^k \geq \frac{3}{4} \times 0,5^k + 3 \times 0,5^k$$

$$u_{k+1} \geq \left(\frac{3}{4} + 3 \right) \times 0,5^k$$

$$u_{k+1} \geq \frac{15}{4} \times 0,5^k$$

$$u_{k+1} \geq \frac{15}{4} \times 0,5^k \geq \frac{15}{8} \times 0,5^k = \frac{15}{4} \times 0,5 \times 0,5^k = \frac{15}{4} \times 0,5^{k+1}.$$

Donc la propriété $P(k + 1)$ est vraie.

Conclusion

D'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vérifiée pour tout entier naturel $n \geq 1$.

EXERCICE 4
1+2+1 = 4 points

Le nombre de plaques d'immatriculation comportant :

1. quatre lettres suivies de trois chiffres est de : $26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 = 26^4 \times 10^3 = 4,56976 \times 10^8$.
2. deux lettres distinctes de O, I, U suivies de cinq chiffres compris entre 2 et 7 est de : $23^2 \times 6^5 = 4113504$.
3. cinq lettres, toutes distinctes, suivies de deux chiffres est de : $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 10 \times 10 = 7,8936 \times 10^8$.

EXERCICE 5
2 points

Le nombre de numéros de téléphone possibles commençant par 06 est donc égal au nombre de 8-uplet de :

$E = \{0; 1; 2; \dots; 8; 9\}$.

Cet ensemble E est composé de 10 éléments. Donc le nombre de numéros de téléphone possibles commençant par 06 est égal à 10^8 .

EXERCICE 6
1+1 = 2 points

On considère les ensembles $E = \{a; b\}$ et $F = \{1; 2; 3; 4\}$.

Le nombre d'éléments de $E \times F$ est égal à : $2 \times 4 = 8$.

Le nombre d'éléments de $E \cup F$ est égal à : $2 + 4 = 6$.