Devoir Surveillé n°4

Exercice 1 — 4 points

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \in]-\infty; 0[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -x+1 & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$

1. Calculer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Expliquer pourquoi f est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
3. La fonction f est-elle continue en 0 ?
4. Conclure sur l'étude de la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 — 5 points

Soit (u_n) une suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1$ et $u_0 = 1$.
Pour tout entier naturel n, on note $v_n = u_n - n$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 — 6 points

On considère la fonction f définie sur $[-20; 2]$ par $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^2}$.

1. Démontrer que $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(1+x^2)^2}$.
2. Étudier le signe de f' puis en déduire le tableau de variations complet de la fonction f.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-20; 2]$.
4. Déterminer la valeur α.

Exercice 4 — 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)e^{2x-1}$.

1. Démontrer que $f''(x) = 4xe^{2x-1}$.
2. En justifiant votre raisonnement, étudier la convexité de la fonction f.
3. Préciser les coordonnées du ou des éventuels points d'inflexion.