

Devoir Surveillé n°2 Correction

EXERCICE 1

6 points

- (2 pts) Il y a $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ anagrammes du mot "PARC".
- (2 pts) Il y a $5 \times 4 \times 3 \times 1 \times 1 = 60$ anagrammes du mot "MAMIE".
- (2 pts) Il y a $1 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$ anagrammes du mot "SCHMILBLICK" commençant et finissant par une voyelle.

EXERCICE 2

14 points

Partie A

- (0,5 pt) $a_1 = a_0 \times \frac{85}{100} + 450 = 200 \times \frac{85}{100} + 450 = 620$
- (0,5 pt) Prendre les 85 % du nombre de collaborateurs en télétravail revient à multiplier par $1 - \frac{85}{100} = 0,15$, puis on ajoute 450. Donc, pour tout entier naturel n , on a : $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
- (1 pt) On suppose que (a_n) converge vers un réel l . Par unicité de la limite on a : $l = 0,85l + 450 \implies 0,15l = 450 \implies l = 3000$.
- (a) (2 pts) $v_{n+1} = a_{n+1} - 3000 = 0,85a_n + 450 - 3000 = 0,85(v_n + 3000) - 2550 = 0,85v_n + 2550 - 2550 = 0,85v_n$.
Donc (v_n) est géométrique de raison 0,85 et de premier terme $v_0 = a_0 - 3000 = 200 - 3000 = -2800$.
(b) (1 pt) On en déduit que, pour tout n , on a $v_n = v_0 \times q^n = -2800 \times 0,85^n$.
(c) (1 pt) On a $v_n = a_n - 3000$ donc $a_n = v_n + 3000$ d'où, pour tout entier naturel n , $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.
(d) (1 pt) On a : $a_{n+1} - a_n = -2800 \times 0,85^{n+1} + 3000 + 2800 \times 0,85^n - 3000 = 2800 \times 0,85^n(-0,85 + 1) = 2800 \times 0,85^n \times 0,15 = 420 \times 0,85^n > 0$ car $n \in \mathbb{N}$.
La suite (a_n) est donc strictement croissante.

Partie B

- (2 pts) f est une fonction rationnelle définie sur $[0, +\infty[$ donc elle est dérivable sur $[0, +\infty[$. On a :
$$f'(x) = \frac{5 \times (x+2) - (5x+4) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{5x+10-5x-4}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}.$$

 $6 > 0$ et $(x+2)^2 > 0$ pour tout $x \in [0, +\infty[$ donc $f'(x) > 0$ sur $[0, +\infty[$. Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
- (a) (2 pts) Soit la propriété $P(n) : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation
 $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{5 \times u_0 + 4}{u_0 + 1} = \frac{5 \times 1 + 4}{1 + 2} = \frac{9}{3} = 3$. Donc : $0 \leq 1 \leq 3 \leq 4$ soit $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 4$.
La propriété $P(0)$ est vraie.
Hérédité
Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang k . On veut montrer qu'elle est vraie au rang $k+1$, $P(k+1) : 0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$.
La fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc sur $[0, 4]$.
De la relation $0 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 4$ on déduit $f(0) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(4)$.
 $f(0) = \frac{4}{2} = 2 \geq 0$; $f(u_k) = u_{k+1}$; $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$ et $f(4) = \frac{24}{6} = 4$.
On a ainsi : $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$. Donc la propriété $P(k+1)$ est vraie.
Conclusion
La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) (1 pt) Pour tout n , on a $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante. Pour tout n , on a $u_n \leq 4$ donc la suite (u_n) est majorée. La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente.
- (2 pts) On admet que pour tout entier naturel $n : 0 \leq 4 - u_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$. La suite $\left(3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ or $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc la suite $\left(3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ converge vers 0.
D'après le théorème des gendarmes, on déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - u_n = 0$. Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.