

Devoir Surveillé n°6

EXERCICE 1**9 points**

Soit (E) l'équation différentielle : $y' - 3y = 2\cos(x) - \sin(x)$.

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ soit une solution de (E) .
2. Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $f - g$ est une solution de l'équation différentielle $(E_0) : y' - 3y = 0$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E_0) .
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E) .
5. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

EXERCICE 2**11 points**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{4}x$. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on notera f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{e^x - 3}{4(e^x + 1)}$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2; 5]$.

On admettra que la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.

5. Justifier le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
6. En déduire l'étude de la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
7. Résoudre sur $] -\ln(2); +\infty[$ l'équation sur $f(x) = \frac{1}{4}x + \ln(2 - e^{-x})$.

Devoir Surveillé n°6

EXERCICE 1**9 points**

Soit (E) l'équation différentielle : $y' - 3y = 2\cos(x) - \sin(x)$.

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ soit une solution de (E) .
2. Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $f - g$ est une solution de l'équation différentielle $(E_0) : y' - 3y = 0$.
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E_0) .
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E) .
5. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

EXERCICE 2**11 points**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{4}x$. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on notera f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{e^x - 3}{4(e^x + 1)}$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[2; 5]$.

On admettra que la fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$.

5. Justifier le signe de $f''(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
6. En déduire l'étude de la convexité de f sur $\mathbb{R}$.
7. Résoudre sur $] -\ln(2); +\infty[$ l'équation sur $f(x) = \frac{1}{4}x + \ln(2 - e^{-x})$.