

Devoir Surveillé n°8

Toutes vos réponses devront être soigneusement rédigées et justifiées

DS n°7 Trigonométrie (exo 1)	DS n°7 Intégrales (exos 2-3)
/10	/10

EXERCICE 1

10 points

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sin(x)\cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est impaire et 2π -périodique.
2. Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin(x) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sin(x) \right)$.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. En déduire le signe de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0,12$ admet une unique solution α sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.
Donner une valeur de α à 10^{-2} près.

EXERCICE 2

7 points

Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. Calculer I_0 .
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n , $I_n \geq 0$.
(b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
(c) En déduire que la suite (I_n) converge.
3. (a) Justifier que pour tout entier naturel n : $I_n \leq \int_0^1 x^n dx$.
(b) En déduire la limite de la suite (I_n) .

EXERCICE 3

3 points

En utilisant une intégration par parties, calculer : $I = \int_0^{\pi/2} x \cos(x) dx$.