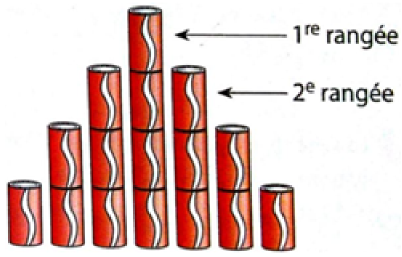
Devoir Surveillé n°7

Exercice 1 — 6 points

On considère l'empilement de canettes représenté ci-contre.
On note u_n le nombre de canettes de la n-ième rangée en partant du sommet.
On a donc $u_1 = 1$ et $u_2 = 3$.



1. Donner la valeur de u_3.
2. Expliquer pourquoi la suite (u_n) est arithmétique et donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ? Justifier.
4. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
5. Quel est le numéro du premier étage constitué de plus de 80 canettes ? Justifier par un calcul.
6. De combien de canettes est constituée une pyramide de 50 étages ?
7. Quelle semble être la limite de la suite (u_n) ?

Exercice 2 — 8 points

Un parc propose à ses visiteurs des pass annuels donnant un accès illimité à l'ensemble du site. En 2019, 5000 visiteurs achètent ce pass. Chaque année, 90 % des visiteurs renouvelleront leur pass et 800 nouveaux visiteurs en achèteront un.
On note u_n le nombre de visiteurs ayant le pass en $2019 + n$. Ainsi $u_0 = 5000$.

1. Déterminer u_1 et u_2.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 8000$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Donner sa raison et son premier terme.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire une expression de u_n en fonction de n.
4. Combien de visiteurs auront le pass en 2040 ? Justifier par un calcul et arrondir à l'unité.
5. Déterminer, grâce à la calculatrice, l'année à partir de laquelle plus de 7950 visiteurs auront le pass.

Exercice 3 — 6 points

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{e^x}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Étudier, en justifiant très soigneusement les étapes de votre raisonnement, les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.