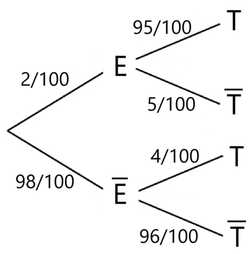
Devoir Surveillé n°3 Correction

Exercice 1 — 5 points

1. **(1,5 pts)** Voici ci-contre l'arbre de probabilité traduisant la situation décrite par l'énoncé.



2. **(1 pt)** $P(E \cap T) = \dfrac{2}{100} \times \dfrac{95}{100} = 0,019$.
3. **(1,5 pts)** D'après la formule des probabilités totales :
   $P(T) = P(E \cap T) + P(\overline{E} \cap T) = 0,019 + 0,98 \times 0,04 = 0,019 + 0,0392 = 0,0582$.
4. **(1 pt)** $P_T(E) = \dfrac{P(E \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,019}{0,0582} \simeq 0,33$.

Exercice 2 — 5 points

(2 pts) On factorise tout d'abord notre expression :

- $\Delta = 100 - 4 \times (-1) \times 5,25 = 121$. Donc $x_1 = \dfrac{-10-11}{-2} = 10,5$ et $x_2 = \dfrac{-10+11}{-2} = -0,5$. Ainsi : $-x^2 + 10x + 5,25 = (x - 10,5)(x + 0,5)$.
- On a une identité remarquable : $4x^2 + 12 + 9 = (2x+3)^2$.

Ainsi : $(-x^2 + 10x + 5,25)(4x^2 + 12x + 9) = (x - 10,5)(x + 0,5)(2x+3)^2$.
(1,5 pts) On cherche maintenant les solutions égales à 0 :
$(-x^2 + 10x + 5,25)(4x^2 + 12x + 9) = 0 \Leftrightarrow (x - 10,5)(x + 0,5)(2x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 10,5$ ou $x = -0,5$ ou $x = -\frac{3}{2}$.
(1 pt) On en déduit donc le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{21}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

(0,5 pt) Ainsi, $S =]-0,5; 10,5[$.

Exercice 3 — 5 points

1. **(1 pt)** $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{6}{-6} = 1$ et $\beta = f(\alpha) = -3 + 6 - 4 = -1$.
   La forme canonique de la fonction f est donc : $f(x) = -3(x-1)^2 - 1$.
2. **(1 pt)** Les coordonnées du sommet de la courbe représentative de la fonction f sont : $(1; -1)$.
3. **(2 pts)** On en déduite le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	-1	$\searrow$	

4. **(1 pt)** Au vu de ce tableau, la représentation de la fonction f ne coupe pas l'axe des abscisses car le maximum de la fonction f est -1.

Exercice 4 — 5 points

1. **(1 pt)** $x \in [0; m]$.
2. **(1 pt)** Dans le triangle rectangle AEH en A, d'après le théorème de Pythagore : $EH^2 = AE^2 + AH^2 = x^2 + (m-x)^2 = x^2 + m^2 - 2mx + x^2 = 2x^2 - 2mx + m^2$.
   Ainsi, $f(x) = \mathscr{A}_{EFGH} = EH \times EH = EH^2 = 2x^2 - 2mx + m^2$.
3. **(2 pts)** On veut démontrer que $f(x) > 0$.
   Calculons tout d'abord Δ : $\Delta = (-2m)^2 - 4 \times 2 \times m^2 = 4m^2 - 8m^2 = -4m^2$.
   Or m est un nombre réel strictement positif donc $-4m^2 < 0$. Ainsi, f n'a pas de racine en 0.
   On calcule donc une image pour connaître son signe : $f(0) = m^2 > 0$ donc f sera toujours positive.
4. **(1 pt)** $f(2) = 4 \Leftrightarrow 8 - 4m + m^2 = 4 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow (m-2)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.
   On a $f(2) = 4$ pour $m = 2$.