Devoir Surveillé n°3 Correction

Exercice 1 — 1+1+1+2+3+2+1+1 = 12 points

1. (a) Pour tout nombre $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $(x+3)^2 > 0$ et $4 > 0$. Ainsi, $f'(x) = 0$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

   (b) Voici le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

   (c) Pour tout $x \in [0;1]$, f est croissante donc on a : $0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1) \Longrightarrow \frac{2}{3} \leq f(x) \leq 1$. D'où pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) \in [0;1]$.

   (d) $f(x) = x \Longrightarrow \frac{2x+2}{x+3} = x \Longrightarrow 2x+2 = x^2+3x \Longrightarrow x^2+x-2 = 0 \Longrightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Longrightarrow x = 1$ ou $x = -2$. Or $x \in [0;1]$ donc l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ est $x = 1$.

2. (a) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $0 \leq u_n \leq 1$, pour tout entier naturel n.

   - **Initialisation**
     Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 0$. Donc on a : $0 \leq 0 \leq 1$.
     La propriété est vraie au rang 0.
   - **Hérédité**
     Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang k, c'est-à-dire : $0 \leq u_k \leq 1$. On veut montrer qu'elle est vraie au rang $k+1$: $0 \leq u_{k+1} \leq 1$. On a :
     $0 \leq u_k \leq 1 \implies f(0) \leq f(u_k) \leq f(1)$ (f est strictement croissante sur $]-3\ ;\ +\infty[$)
     $\implies \frac{2}{3} \leq u_{k+1} \leq 1 \implies 0 \leq \frac{2}{3} \leq u_{k+1} \leq 1$. Donc la propriété est vraie au rang $k+1$.
   - **Conclusion**
     La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour $n \geqslant 0$. D'après le principe de récurrence, on peut dire qu'elle est vraie pour tout entier naturel n. Pour tout entier naturel n, on a donc : $0 \leq u_n \leq 1$.

   (b) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{2u_n+2}{u_n+3} - u_n = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n+3} = \frac{(u_n+2)(1-u_n)}{u_n+3}$. Or $0 \leq u_n \leq 1$ donc les trois facteurs du quotient sont positifs et ainsi on en déduit que (u_n) est croissante.

   (c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge.

   (d) Par unicité de la limité, la limite l de la suite (u_n) est une solution de l'équation $l = f(l)$. Par la question 1d, on en conclut que $l = 1$.

Exercice 2 — 1+1+1 = 3 points

1. $x = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$.
2. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{f(x)} = 0$.
3. e^2.

Exercice 3 — 2+1+1+1 = 5 points

1. $g(x) = \frac{x^2+2}{x+1} = \frac{x + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$. Or $\frac{2}{x}$ et $\frac{1}{x}$ ont pour limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

   Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \frac{+\infty + 0}{1+0} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \frac{-\infty + 0}{1+0} = -\infty$.

   Enfin, on a : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} g(x) = \frac{3}{0^+} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} g(x) = \frac{3}{0^-} = -\infty$.

2. On a donc une asymptote verticale d'équation $x = -1$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. $g(1) = \frac{1^2+2}{1+1} = \frac{3}{2} = 1,5$ et $g(-2) = \frac{(-2)^2+2}{-2+1} = \frac{6}{-1} = -6$.
4. Voici la courbe attendue ci-contre.