Devoir Surveillé n°4 Correction

Exercice 1 — 1+1+1+1 = 4 points

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.
2. f est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions continues (x et des constantes) sur $\mathbb{R}$.
3. Sur $]-\infty;0[$: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 - 1 = -1$. Sur $]0;+\infty[$: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 + 1 = 1$. Or $f(0) = 0$. Ainsi, les deux limites et $g(0)$ ne sont pas égales et donc la fonction f n'est pas continue en 0.
4. On en déduit que la fonction f est continue sur l'intervalle $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

Exercice 2 — 2+1+1+1 = 5 points

1. Pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \frac{3}{4}u_n - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}(u_n - n) = \frac{3}{4}v_n$.
   On reconnait la définition d'une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
   Son premier terme est $v_0 = u_0 - 0 = 1 - 0 = 1$.
2. On a donc, pour tout entier naturel n : $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
3. Par définition de (v_n) on a $v_n = u_n - n$. Donc $u_n = v_n + n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.
4. $-1 < \frac{3}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$. De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$. D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 3 — 1+2+2+1 = 6 points

1. $f'(x) = \dfrac{-1 \times (1+x^2) - (1-x) \times 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-1 - x^2 - 2x + 2x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(1+x^2)^2}$.
2. $(1+x^2)^2 > 0$ donc f' est du signe de $x^2 - 2x - 1$. On a $\triangle = 8$ et ainsi les deux solutions sont $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ ($x_2 \notin [-20;2]$). On en déduit donc le tableau de variations de f :

x	-20		$1-\sqrt{2}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{21}{401}$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2-2^{\frac{3}{2}}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{5}$

3. f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[1-\sqrt{2};2]$.
   On a $f(2) = -0,2 < 0 < f(1-\sqrt{2}) \simeq 1,2$.
   D'après le corolaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1-\sqrt{2};2]$.
   D'où l'unique solution sur $[-20;2]$.
4. $\alpha = 1$.

Exercice 4 — 2+2+1 = 5 points

1. $f(x) = (x-1)e^{2x-1}$ donc :
   $f'(x) = 1 \times e^{2x-1} + (x-1) \times 2 \times e^{2x-1} = e^{2x-1}(1 + 2(x-1)) = e^{2x-1}(2x-1)$.
   $f''(x) = 2 \times e^{2x-1} \times (2x-1) + e^{2x-1} \times 2 = 2 \times e^{2x-1}(2x - 1 + 1) = 2 \times e^{2x-1} \times 2x = 4xe^{2x-1}$.
2. $4e^{2x-1} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc f'' est du signe de x sur $\mathbb{R}$. D'où : $f''(x) = 0$ si $x = 0$; $f'' > 0$ si $x > 0$ et $f'' < 0$ si $x < 0$.
   On obtient le tableau suivant pour la convexité de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$
convexité de f		concave		convexe	

3. Il existe un point d'inflexion en $x = 0$ d'ordonnée $f(0) = -e^{-1}$ donc de coordonnées : $(0;-e^{-1})$.