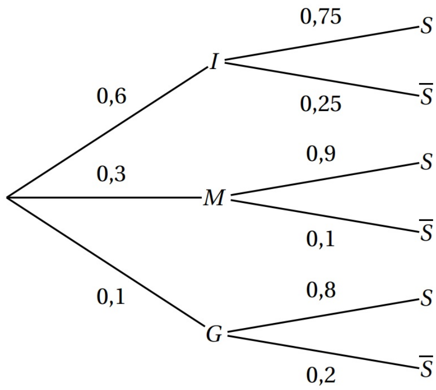
Devoir Surveillé n°4 Correction

Exercice 1 — 5 points



1. **(1 pt)** Voici l'arbre pondéré ci-contre.
2. **(1 pt)** $P(I \cap S) = P(I) \times P_I(S) = 0,6 \times 0,75 = 0,45$.
3. **(2 pts)** On a de même $P(M \cap S) = P(M) \times P_M(S) = 0,3 \times 0,9 = 0,27$ et $P(G \cap S) = P(G) \times P_G(S) = 0,1 \times 0,8 = 0,08$.
   D'après la loi des probabilités totale :
   $P(S) = P(I \cap S) + P(M \cap S) + P(G \cap S) = 0,45 + 0,27 + 0,08 = 0,8$.
4. **(1 pt)** $P_S(I) = \dfrac{P(S \cap I)}{P(S)} = \dfrac{P(I \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,45}{0,8} = 0,5625 \simeq 0,563$.

Exercice 2 — 5 points

1. (a) **(1 pt)** À l'instant $t = 0,8$ le métro a parcouru environ $5,5$ m.
   (b) **(1 pt)** Le métro est arrêté au bout de 3 s.
   (c) **(1 pt)** $\dfrac{\frac{19}{3} - \frac{7}{3}}{1 - 0} = 4$ donc à l'instant $t = 1$ la vitesse instantanée est de 4 m/s.
   (d) **(1 pt)** La vitesse semble maximale à l'instant $t = 0$.
2. **(1 pt)** $\alpha = \frac{6}{2} = 3$ et $1 > 0$ donc c'est un minimum qui est atteint en $\beta = f(\alpha)$. La vitesse minimale est atteinte pour $t = 3$ s.

Exercice 3 — 10 points

Partie A

1. **(1,5 pts)** $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 20 = 36 - 80 = -44 < 0$ donc f n'est pas factorisable.
   $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$ et $\beta = f(\alpha) = 3^2 - 6 \times 3 + 20 = 9 - 18 + 20 = 11$.
   Ainsi la forme canonique de f est : $f(x) = (x-3)^2 + 11$.
2. **(1,5 pts)** $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{-2} = 5$ et $\beta = g(\alpha) = -5^2 + 10 \times 5 - 12 = -25 + 50 - 12 = 13$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	13	$\searrow$

3. **(1,5 pts)** On calcule : $f(x) - g(x) = x^2 - 6x + 20 + x^2 - 10x + 12 = 2x^2 - 16x + 32$.
   On factorise cette expression : $2x^2 - 16x + 32 = 2(x^2 - 8x + 16) = 2(x-4)^2$.
   Or $2 > 0$ et $(x-4)^2 \geqslant 0$ donc : $f(x) - g(x) \geqslant 0$.
   Ainsi $f(x) \geqslant g(x)$ donc la parabole liée à f est toujours au-dessus ou sur la parabole liée à g.
4. **(1,5 pts)** Il faut résoudre : $f(x) = g(x) \iff x^2 - 6x + 20 = -x^2 + 10x - 12 \iff 2x^2 - 16x + 32 = 0 \iff x^2 - 8x + 16 = 0 \iff (x-4)^2 = 0 \iff x = 4$. Le point d'intersection de ces deux paraboles a pour coordonnées $(4; 12)$.

Partie B

1. **(1,5 pts)** Soit h un nombre réel tel que $h > 0$.
   $\tau(h) = \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \dfrac{16 + 8h + h^2 - 24 - 6h + 20 - 12}{h} = \dfrac{2h + h^2}{h} = 2 + h$.
   Ainsi : $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h \to 0} 2 + h = 2$. f est dérivable en 4 et $f'(4) = 2$.
2. **(1,5 pts)** Soit h un nombre réel tel que $h > 0$.
   $\tau(h) = \dfrac{g(4+h) - g(4)}{h} = \dfrac{-16 - 8h - h^2 + 40 + 10h - 12 - 12}{h} = \dfrac{2h - h^2}{h} = 2 - h$.
   Ainsi : $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h \to 0} 2 - h = 2$. g est dérivable en 4 et $g'(4) = 2$.
3. **(1 pt)** Les tangentes à P_1 et P_2 ont le même coefficient directeur en 4 et passent par le point de coordonnées $(4; 12)$. Elles sont donc confondues.